29.10.08

29.10.08

$$\underline{\tau} = m\ddot{\underline{x}} + \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \quad \perp \quad \underline{h}$$

$$\delta S[\underline{x}] = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\underline{x} + \varepsilon \underline{h}, \underline{\dot{x}} + \varepsilon \underline{\dot{h}}) \Big|_{\varepsilon = 0}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{x}} \underline{h} + \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} \underline{\dot{h}} \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} \right)}_{\underbrace{-\frac{\partial V}{\partial \underline{x}} - m\underline{\ddot{x}}}_{0}} \underline{h} + \underbrace{RT\Big|}_{0}$$

$$L = \frac{1}{2} m \underline{\dot{x}}^2 - V(\underline{x})$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} dt\, \underline{Z} \cdot \underline{h}$$

Zwangskraft $\perp$ virtuellen Verrückungen $\underline{h}$.

Anwendung: Statik

Verallgemeinerung von d'Alembert zu N Teilchen

$$Z_n = m_n \ddot{\underline{x}}_n + \underline{F}_n$$

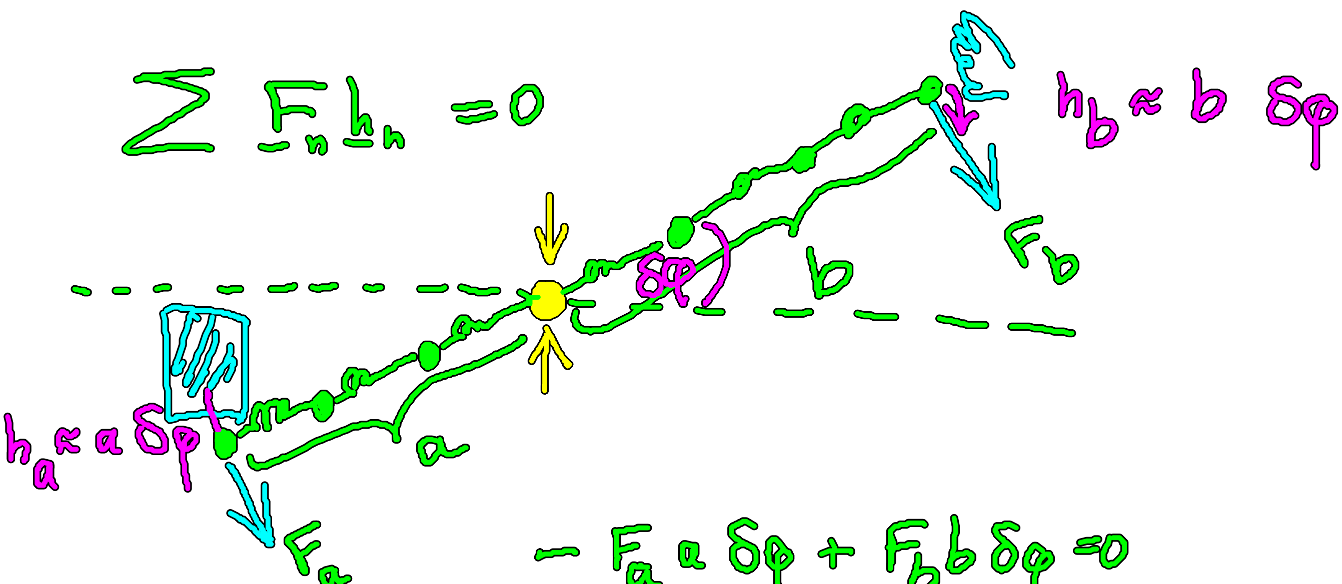
äußere Kräfte

<u>d'Alembert</u>:

$$\sum_{n=1}^{N} \left(m_n \ddot{\underline{x}}_n + \underline{F}_n\right) \cdot \underline{h}_n = 0$$

<u>Hebel</u>: $\dot{\underline{x}}_n = \ddot{\underline{x}}_n = 0$ (statisch)

$$\sum \underline{F}_n \underline{h}_n = 0$$



$$-F_a a\,\delta\varphi + F_b b\,\delta\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a F_a = b F_b}$$ „Hebelgesetz"

Klassifikation der Randbedingungen

holonome RB

$$g_\alpha(x_1, \dots, x_K) = 0$$

enthält die Zeit t nicht

„skleronom"

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$g_\alpha(x_1, \dots, x_k, t) = 0$ rheonom enthält

$z^2 + x^2 + y^2 = f(t)$

keine Ableitungen $\dot{x}_i$

alles andere : nicht-holonom

z.B. Ungleichungen

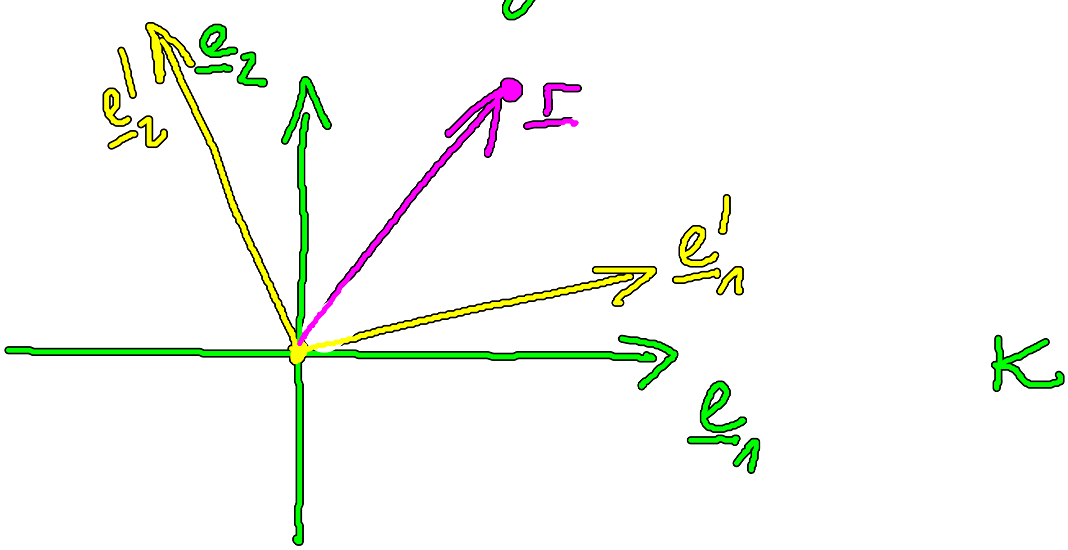
$x^2 + y^2 \geq 5$

III Der Starre Körper

Zwei Bezugssysteme

K : Inertialsystem

K' : beliebig, z.B. rotierend



$\underline{e}_i \to \boxed{\underline{e}_i' = R\,\underline{e}_i}$

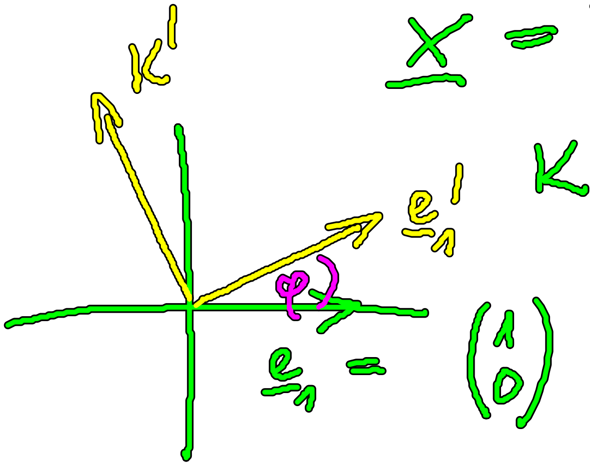
$\det R \neq 0$

R: $d \times d$ Matrix, $(d=3)$ für $\mathbb{R}^d$

Punkt $\underline{r} = \sum_i x^i \underline{e}_i = \sum x^{i'} \underline{e}_i'$

$\Rightarrow$ Der Vektor der Komponenten von $\underline{r}$ in den jeweiligen Basen erfüllt

$$\underline{x} = R\,\underline{x}'$$



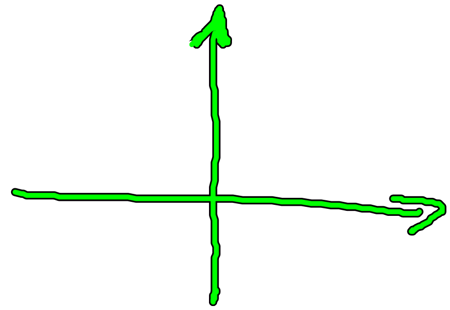
$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ +\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im K-System

$\underline{e}_1' = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ im K-System

$\underline{e}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im K'-System.

Zeitabhängiger Basiswechsel



$$R = R(t)$$

$$\boxed{\underline{x}' = R^{-1}\underline{x}}$$

Geschwindigkeit $\dot{\underline{x}} = \frac{d}{dt} R\underline{x}' = \dot{R}\underline{x}' + R\dot{\underline{x}}'$

$$= \underbrace{\dot{R}R^{-1}}_{\Omega(t)}\underline{x} + R\dot{\underline{x}}'$$

$$= \Omega(t)\underline{x} + R\dot{\underline{x}}'$$

$\Uparrow$ Matrix bzgl. K

$\underline{y} = \Omega\underline{x}$ in K

$\underline{y}' = \Omega'\underline{x}'$ in K'

$R^{-1}\underline{y} = \Omega' R^{-1}\underline{x}$

$\underline{y} = \underbrace{R\Omega' R^{-1}}_{=\Omega}\underline{x}$

Also $\boxed{\Omega' = R^{-1}\Omega R = R^{-1}\dot{R}R^{-1}R = R^{-1}\dot{R}}$

$$\dot{\underline{x}} = \Omega \underline{x} + R\dot{\underline{x}}' = R\Omega' \underbrace{R^{-1}\underline{x}}_{\underline{x}'} + R\dot{\underline{x}}'$$

$$= R\underbrace{\left(\Omega' \underline{x}' + \dot{\underline{x}}'\right)}_{\text{in } K'}$$

//

Beschleunigung

$$\ddot{\underline{x}} = \frac{d}{dt}\left(R\dot{\underline{x}}' + \Omega \underline{x}\right)$$

$$= \underbrace{\dot{R}\dot{\underline{x}}'}_{\Omega R \dot{\underline{x}}'} + R\ddot{\underline{x}}' + \dot{\Omega}\underline{x} + \Omega\dot{\underline{x}}$$

$\Omega = \dot{R}R^{-1}$

$$= \Omega R\dot{\underline{x}}' + R\ddot{\underline{x}}' + \dot{\Omega}R\underline{x}' + \Omega\left(\Omega\underline{x} + R\dot{\underline{x}}'\right)$$

$$= R\underbrace{R^{-1}\Omega R}_{\Omega'}\dot{\underline{x}}' + R\ddot{\underline{x}}' + RR^{-1}\dot{\Omega}R\underline{x}' + RR^{-1}\Omega R R^{-1}\left(\Omega R R^{-1}\underline{x} + R\dot{\underline{x}}'\right)$$

$$= R\Omega'\dot{\underline{x}}' + R\ddot{\underline{x}}' + R\left(R^{-1}\dot{\Omega}R\right)\underline{x}' + R\Omega'\Omega'\underline{x}' + R\Omega'\dot{\underline{x}}'$$

$= \dot{\Omega}'$: denn für R^{-1} gilt: $\quad RR^{-1} = 1 \quad / \, d/dt$

$\Omega' = R^{-1}\Omega R$

$$\dot{R}R^{-1} + R\frac{d}{dt}R^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}R^{-1} = -R^{-1}\dot{R}R^{-1}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{r(t)} = -\frac{1}{r^2}\dot{r}\right); \qquad \dot{\Omega}' = R^{-1}\dot{\Omega}R$$

$$\Rightarrow \underline{\ddot{x}} = R\Big(\underbrace{2\Omega'\underline{\dot{x}}'}_{\text{„Coriolis-artig"}} + \underbrace{\underline{\ddot{x}}'}_{\text{normaler Newton}} + \underbrace{\dot{\Omega}'\underline{x}'}_{?} + \underbrace{\Omega'\Omega'\underline{x}'}_{\text{Zentrifugal-artig}}\Big)$$

N. Gleichungen in K: $\quad m\underline{\ddot{x}} = \underline{F} = R\,\underline{F}'$

Komponenten der Kraft in K'

$\Rightarrow \underline{F}' = R^{-1} m \ddot{\underline{x}}$

$$\boxed{m \ddot{\underline{x}}' = \underbrace{\underline{F}'}_{\text{„Newton" im Inertialsystem}} \underbrace{- 2m\Omega' \dot{\underline{x}}' - m\dot{\Omega}' x' - m\Omega'\Omega'\underline{x}'}_{\text{„Scheinkräfte"}}}$$

Rotationen: Spezialfall $R \in SO(3)$ (Rotationen)

„Drehmatrix"

Satz: Für 3-d Rotationen $R \in SO(3)$ ist die Matrix $\Omega(t) \equiv \dot{R}(t) R^{-1}(t)$ schiefsymmetrisch, und es gilt

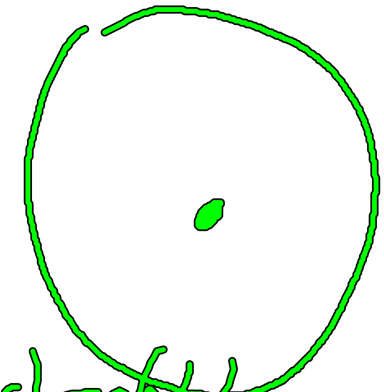
$$\Omega(t)\underline{x} = \underline{\omega}(t) \times \underline{x}$$

Explizit gilt

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Beweis als Aufgabe:

$$\Rightarrow m\ddot{\underline{x}}' = \underline{F}' \underbrace{- 2m\,\underline{\omega}'\times\dot{\underline{x}}'}_{\text{Coriolis-Kraft}} - m\,\dot{\underline{\omega}}'\times\underline{x}' \underbrace{- m\,\underline{\omega}'\times(\underline{\omega}'\times\underline{x}')}_{\text{Zentrifugalkraft}}.$$

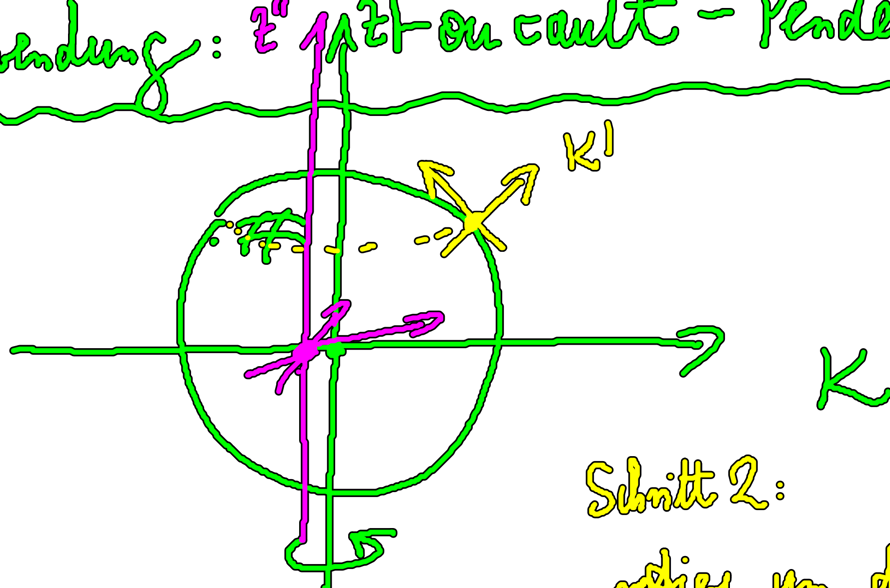


Regel: bac-cab Regel

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\cdot\underline{b}).$$

Anmerkung: $\underline{\omega} = R\,\underline{\omega}'$ für die Winkelgeschwindigkeit

Anwendung: Foucault-Pendel



Schritt 2: $K'' \to K'$

rotiere um die y''-Achse

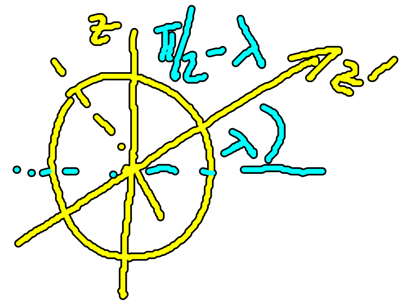
$$\underline{\omega} = \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Schritt 1: $K \to K''$:

Äquatorebne x''-y'' um $z (= z'')$ rotiert

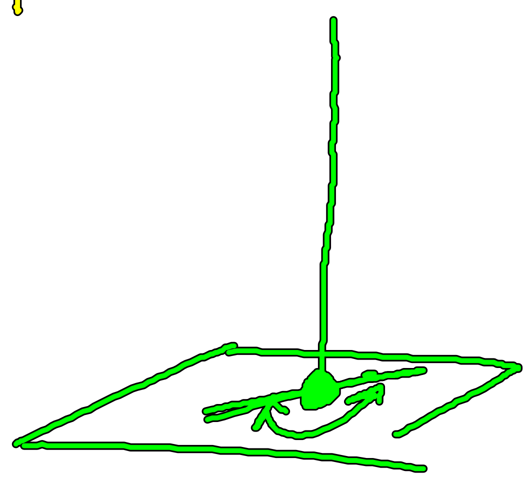
$$\underline{\omega}'' = \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

so dass die neue z'-Achse $\perp$ durch das Labor geht



$$\underline{\omega}' = \Omega \begin{pmatrix} \cos\lambda \\ 0 \\ \sin\lambda \end{pmatrix}$$

Ohne Rotation der Erde



In K': $\ddot{x}' + \omega^2 x' = 0$

$\ddot{y}' + \omega^2 y' = 0$ harmonischer Oszillator

ω: Winkelfreq. der Schwingungen des Pendels.

Mit Rotation: $\ddot{\underline{x}}' + \omega^2 \underline{x}' = -2\,\underline{\omega}' \times \dot{\underline{x}}'$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}' + \omega^2 x' = 2\Omega \sin\lambda\, \dot{y}'$$

$$\ddot{y}' + \omega^2 y' = -2\Omega \sin\lambda\, \dot{x}'$$

$\Omega \sin\lambda \ll \omega \Rightarrow x' + i y' = e^{-i(\Omega \sin\lambda)t}\left(x_0'(t) + i\, y_0'(t)\right)$

mit (x_0, y_0) erfüllt die $\Omega = 0$-Gleichung.

MATHEMATICA !