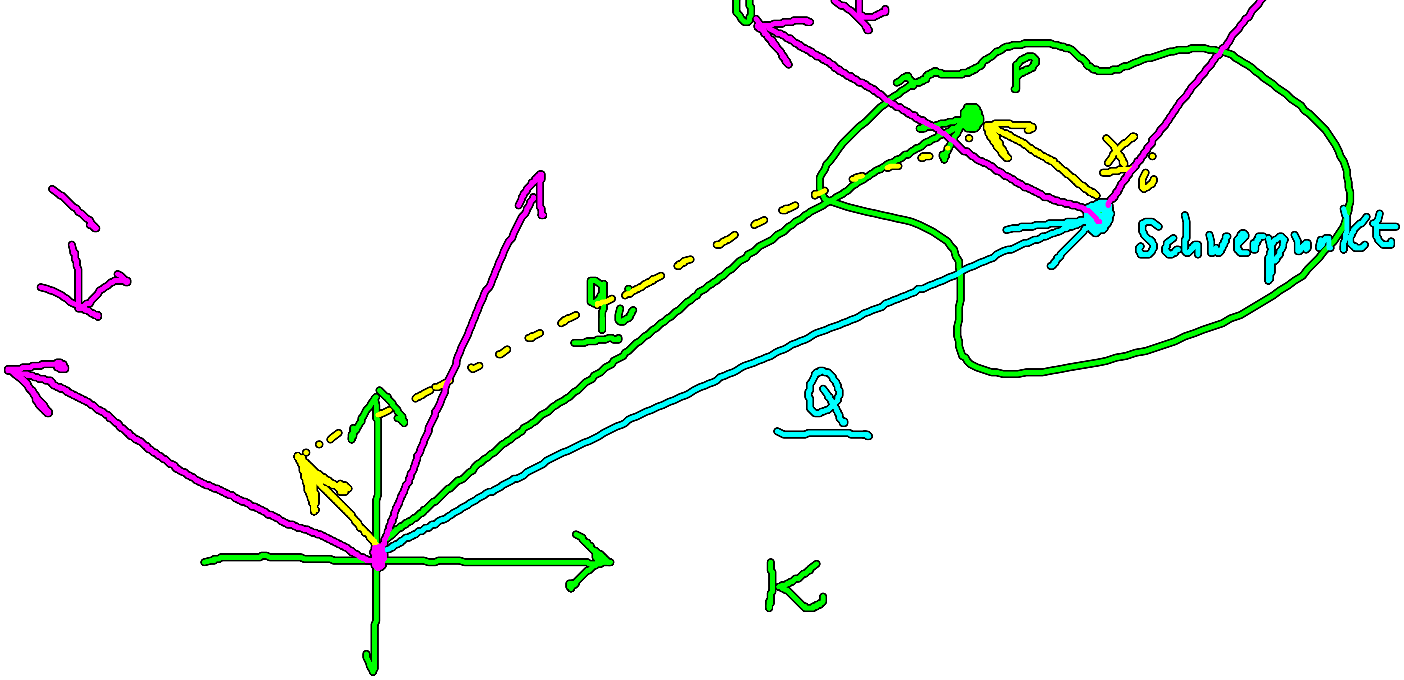
4.11.08

4.11.2008

N Massenpunkte m_i werden als starrer Körper bezeichnet, wenn ihr allgemeiner Bewegungszustand auf eine Schwerpunktsbewegung und eine Rotation eingeschränkt ist



$$\underline{q}_i(t) = \underline{Q}(t) + \underline{x}_i(t) \qquad \text{in } K \text{ (Inertialsystem)}$$

$$\underline{Q} \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{q}_i$$

$$\underline{x}_i(t) = R(t)\,\underline{x}_i', \quad R(t) \in SO(3) \text{ Drehmatrix}$$

$$\underline{x}_i' = \text{consts}$$

Koordinaten von P im System K',
d.h. im „körperfesten System"

<u>Freiheitsgrade des starren Körpers</u>:

$\underline{Q}(t)$ Schwerpunktskoordinaten.

$R(t)$ Drehmatrix.

Geschwindigkeiten

$$\dot{q}_i(t) = \underline{\dot{Q}}(t) + \frac{d}{dt} R(t)\underline{x}_i'$$

$$= \underline{\dot{Q}}(t) + \dot{R}(t)\underline{x}_i'$$

$$= \underline{\dot{Q}}(t) + \underbrace{\dot{R}(t) R^{-1}(t)}\, \underline{x}_i(t)$$

$$= \underline{\dot{Q}}(t) + \Omega(t)\underline{x}_i(t)$$

$$= \underline{\dot{Q}}(t) + \underline{\omega} \times \underline{x}_i(t)$$

$\underline{\omega}$: Winkelgeschwindigkeit im System K

Kinetische Energie des starren Körpers:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{q}_i^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\underline{\dot{Q}} + \underline{\omega} \times \underline{x}_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ \underline{\dot{Q}}^2 + \cancel{2\underline{\dot{Q}}\,(\underline{\omega} \times \underline{x}_i)}_{=0} + (\underline{\omega} \times \underline{x}_i)^2 \right\}$$

denn $\sum_{i=1}^{N} m_i x_i = 0$)

$$\cancel{\underline{Q}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \underline{q}_i = \frac{1}{M} \sum_i m_i \left(\underline{Q} + \underline{x}_i \right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{M}} \cancel{M} \cancel{\underline{Q}} + \underline{\frac{1}{M} \sum m_i \underline{x}_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = T_{trans} + T_{rot} ,$$

$$T_{trans} \equiv \frac{1}{2} M \underline{\dot{Q}}^2$$

$$T_{rot} \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\underline{\omega} \times \underline{x}_i \right)^2$$

Es gilt: T_{rot} ist vom Bezugssystem unabhängig,

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\underline{\omega}' \times \underline{x}_i' \right)^2$$

$$\underline{\omega}' = R \underline{\omega} , \quad R \text{ orthogonal}$$

Skalarprodukt: $\underline{y}^T\underline{y}$, hier

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \underbrace{(\Omega \underline{x}_i)^T \Omega \underline{x}_i}_{\text{Skalarprodukt}}$$

$\underline{y}^T\underline{y}$ ist invariant unter Rotationen:

$$\underline{y} \to R\underline{y} \Rightarrow \underline{y}'^T\underline{y}' = (R\underline{y})^T R\underline{y}$$

$\overset{\shortparallel}{\underline{y}'}$;

$$= \underline{y}^T R^T R \underline{y}$$

$$= \underline{y}^T R^{-1} R \underline{y} = \underline{y}^T\underline{y}$$

Also T_{rot} in K' ausrechnen! dort ist $\underline{x}_i' = \text{const}$.

Ausdrucke vom Typ $\quad (\underline{a}\times\underline{b})^2 = \underline{a}^2\underline{b}^2 - (\underline{a}\underline{b})^2$

$$(\underline{\omega}\times\underline{x})^2 = \left(\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha^2\right)\left(\sum_{\beta=1}^{3}x_\beta^2\right) - \left(\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha x_\alpha\right)^2$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \omega_\alpha \left(\underline{x}^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta \right) \omega_\beta$$

$$\rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \sum_{\alpha\beta=1}^{3} \omega_\alpha \left(\delta_{\alpha\beta} \underline{x}^{(i)2} - x_\alpha^{(i)} x_\beta^{(i)} \right) \omega_\beta$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \omega_\alpha \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\delta_{\alpha\beta} \underline{x}_i^2 - x_{i\alpha} x_{i\beta} \right)}_{\Theta_{\alpha\beta}\ :\ 3\times 3\text{-Matrix}} \omega_\beta$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \omega_\alpha \Theta_{\alpha\beta} \omega_\beta$$

$$= \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{\underline{\Theta}} \, \underline{\omega}$$

$$= \frac{1}{2} (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ & \Theta_{22} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

„Quadratische Form"

(Bilinearform)

- $\underline{\underline{\Theta}}$ ist eine 3×3-Matrix mit reellen Einträgen
- Invarianz der Rotationsenergie

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\left(\underline{\omega}'\right)^T \underline{\underline{\Theta}}' \,\underline{\omega}'$$

$$\left(\underline{\underline{\Theta}}'\right)_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\delta_{\alpha\beta}\left(\underline{x}_i'\right)^2 - x_{i\alpha}' x_{i\beta}' \right)$$

Trägheitstensor in K'

Jetzt mit Massendichte

$$\rho(\underline{x}') = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \delta^{(3)}\left(\underline{x}' - x_i'\right)$$

(vgl. SKRIPT)

$$\Rightarrow \boxed{\Theta_{\alpha\beta}' = \int_{\text{Körper}} d^3\underline{x}'\, \rho(\underline{x}') \left(\delta_{\alpha\beta}\left(\underline{x}'\right)^2 - \underline{x}_\alpha' \underline{x}_\beta' \right)}$$

$$= \int d^3\underline{x}' \sum_{i=1}^{N} m_i\, \delta^{(3)}\left(\underline{x} - \underline{x}_i'\right) \left(\delta_{\alpha\beta}\left(\underline{x}'\right)^2 - \underline{x}_\alpha' \underline{x}_\beta' \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\delta_{\alpha\beta}\left(\underline{x}_i'\right)^2 - \underline{x}_{i\alpha}' \underline{x}_{i\beta}' \right)$$

Eigenschaften des Trägheitstensors

- 3×3 reelle, symmetr. Matrix.
- Diese Matrix kann diagonalisiert werden.

$$\Theta = O\,\Theta_D\,O^{-1}, \quad \Theta_D = \begin{pmatrix} \Theta_1 & & 0 \\ 0 & \Theta_2 & \\ & & \Theta_3 \end{pmatrix}$$

„Hauptachsentransformation"

$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$: Hauptträgheitsmomente

Im durch die Eigenvektoren von Θ aufgespannten Koordinatensystem (Hauptachsensystem)

$$\Theta_1 = \sum_{i=1}^{N} m_i \Big(\underbrace{\underline{x}_i^2 - x_{i,1} x_{i,1}}_{x_{i,1}^2 + x_{i,2}^2 + x_{i,3}^2 - x_{i,1}^2} \Big) > 0$$

$$= x_{i,2}^2 + x_{i,3}^2 > 0$$

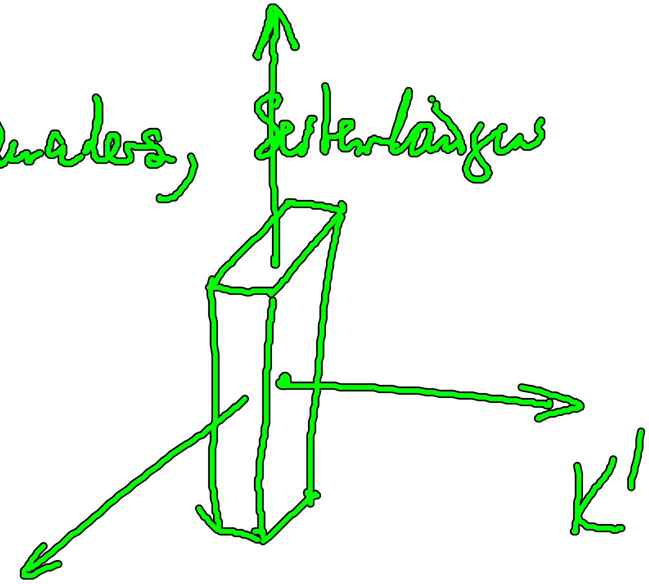
auch $\Theta_2 > 0$, $\Theta_3 > 0$ $\Rightarrow$ Θ ist positiv definit.

Praktische Berechnung

Trägheitstensor eines Quaders, Seitenlängen

a, b, c

$\rho = \text{const}$



$$\Theta_{33} = \int d^3\underline{x}\, \rho \left(\underline{x}^2 \underbrace{\delta_{3,3}}_{1} - (\underline{x})_3 (\underline{x})_3 \right)$$

$$= \rho \int d^3x \underbrace{\left(\underline{x}^2 - z^2 \right)}_{x^2+y^2} = \rho \int_{\text{Quader}} d^3x \left(x^2 + y^2 \right)$$

$$= \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(x^2 + y^2 \right)$$

$$= \rho c \left(b \int_{-a/2}^{a/2} dx\, x^2 + a \int_{-b/2}^{b/2} dy\, y^2 \right)$$

$$= \rho c \left(b\, 2 \frac{1}{3} \frac{a^3}{8} + a\, 2 \frac{1}{3} \frac{b^3}{8} \right)$$

$$= \rho\, abc \frac{1}{12} \left(a^2 + b^2 \right) = \frac{M}{12} \left(a^2 + b^2 \right)$$

$$\Theta_{22} = \frac{M}{12} \left(a^2 + c^2 \right); \quad \Theta_{11} = \frac{M}{12} \left(b^2 + c^2 \right)$$

$$\Theta_{\alpha\beta} \equiv \int d^3x\, \rho \left(\underbrace{x^2 \delta_{\alpha\beta}}_{0} - x_\alpha x_\beta \right) \qquad \alpha \neq \beta$$

$$= -\int d^3x\, \rho \;\; x_\alpha x_\beta$$

z.B. $$\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy\, dz \;\; x \cdot y = 0$$

Θ' ist diagonal, (im System K')

$$\Theta' = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

z.B. Rotation um die Diagonale

$$\hat{\underline{n}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix};$$

$$\underline{\omega}' = \omega_0 \hat{\underline{n}}, \qquad \omega_0 \text{ Winkelfrequenz}$$

$$\Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2} (\underline{\omega}')^T \underline{\underline{\Theta}}' \omega' =$$

$$= \frac{1}{2} \omega_0^2 \, \Theta'_{\underline{n}}$$

mit $\Theta'_{\underline{n}} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\left(a^2(b^2+c^2)+b^2(a^2+c^2)+c^2(a^2+b^2)\right)\frac{M}{12}$

$$= \frac{M}{6}\,\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

„Trägheitsmoment bezüglich der Achse $\hat{\underline{n}}$".

Der Drehimpuls

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \underline{q}_i \times \dot{\underline{q}}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i (\underline{Q}+\underline{x}_i)\times(\dot{\underline{Q}}+\underline{\omega}\times\underline{x}_i)$$

$$= M\,\underline{Q}\times\dot{\underline{Q}} + \sum_{i=1}^{N} \underline{x}_i\times(\underline{\omega}\times\underline{x}_i)\, m_i$$

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\,\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\,\underline{b})$$

$$\Rightarrow \underline{L} = \underline{L}_{trans} + \underline{L}_{rot}$$

$$\underline{L}_{rot} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\underline{\omega}(\underline{x}_i)^2 - \underline{x}_i(\underline{x}_i\underline{\omega})\right)$$

P

Es gilt

$$\boxed{\underline{L}_{rot} = \underline{\underline{\Theta}}\;\underline{\omega}}$$

Drehimpuls L

Trägheitstensor

Winkelgeschwindigkeit

Beweis: $(\underline{x}_i)^2 \omega_\alpha - x_{i\alpha}(\underline{x}_i \underline{\omega}) =$

$$= \sum_{\beta=1}^{3} \underbrace{\omega_\beta \left((\underline{x}_i)^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha} x_{i\beta} \right)}_{\underline{x}_i \underline{\omega}} \Big/ \sum_{i=1}^{N} m_i$$

$$\rightarrow \quad (\underline{L}_{rot})_\alpha = \sum_\beta \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\underline{x}_i^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha} x_{i\beta} \right)} \omega_\beta$$

$$\sum_\beta \theta_{\alpha\beta} \omega_\beta = (\underline{\underline{\theta}}\, \underline{\omega})_\alpha$$

Hier $\underline{L}_{rot} = \underline{\underline{\theta}}\, \underline{\omega}$ in K-System

$$\underline{L}_{rot} = \underbrace{R \underline{L}'_{rot}} = \underline{\underline{\theta}}\, \underline{\omega} = \underbrace{\underline{\underline{\theta}}\, R R^{-1} \underline{\omega}}$$

$$\underline{L}'_{rot} = \underbrace{R^{-1} \underline{\underline{\theta}} R}_{\underline{\underline{\theta}}'} \underbrace{R^{-1} \underline{\omega}}_{\underline{\omega}'}$$

$$\boxed{\underline{L}'_{rot} = \underline{\underline{\theta}}'\, \underline{\omega}'} \quad \text{in } K'$$

mit $\underline{\omega} = R\, \underline{\omega}'$