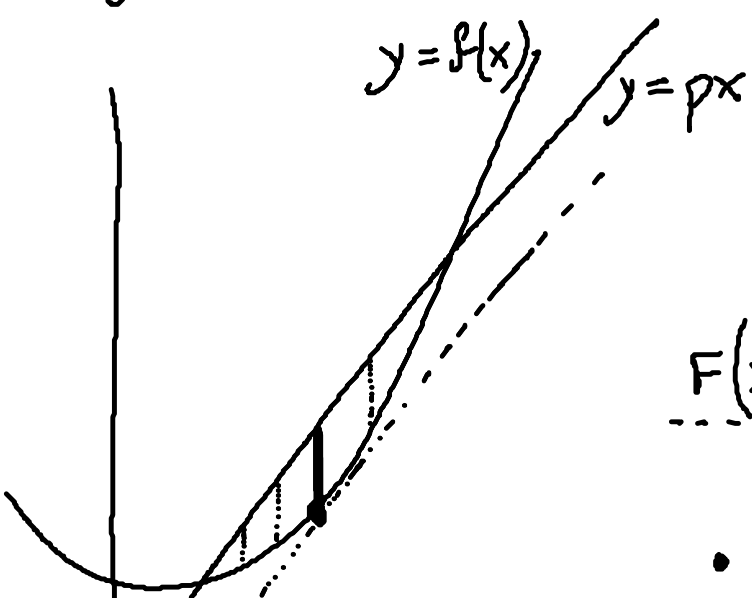
12.11.2008

12.11.2008

Legendre-Trafo: $f(x)$ sei konvex mit $f''(x) > 0$.

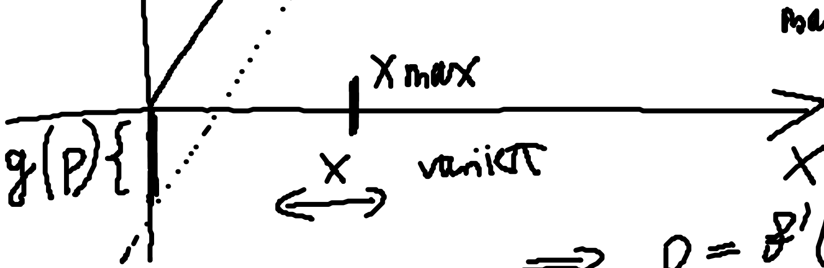



- feste Steigung $p$ vorgeben
- Gerade durch 0 mit Steigung $p$
- Betrachte Abstand

$$F(x,p) \equiv xp - f(x)$$

in vertikaler Richtung

- Finde $x$ so, dass $F(x,p)$




maximal,

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,p) = \boxed{p - f'(x) = 0}$$

$$\Longrightarrow \quad p = f'(x)$$

$$x_{max} = x(p)$$

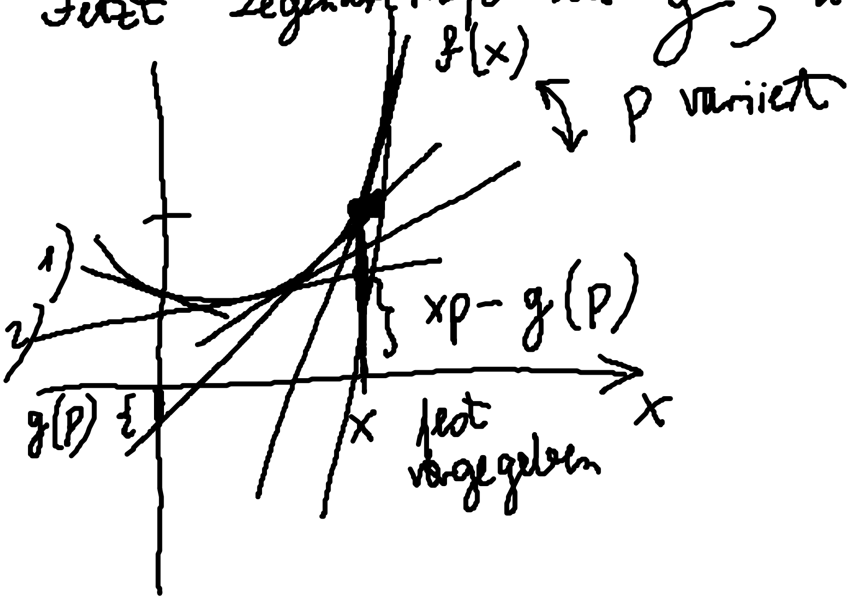
$$g(p) = \max_x \left[ xp - f(x) \right]$$

$$g(p) = \max_x \; xp - f(x)$$ heißt

die Legendre-Transformierte der Funktion $f$,
man schreibt

$$g = \mathcal{L}[f], \quad g(p) = \mathcal{L}[f](p)$$

Jetzt Legendretrafo von $g$, d.h. $\mathcal{L}\mathcal{L}[g] \overset{?}{=} f$




$$\| \; f = \max_p \left( xp - g(p) \right) \; \|$$

Rolle von p, x vertauschen..

ARNOLD

$$\mathcal{L}\mathcal{L}[f] = f.$$

## 4.2. Hamiltonsche Gleichungen

**Def.:** mech. System mit $f$ Freiheitsgraden und Lagrangefunktion $L(q_1,\dots,q_f;\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_f;t)$

Dann heißt die Legendretransformierte von $L$

$$H(q_1,\dots,q_f;p_1,\dots,p_f;t) \equiv \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i p_i - L(q_1,\dots,\dot{q}_f,t)$$

Hamiltonfunktion des Systems.

Wir schreiben $H(\underline{q},\underline{p},t) = \dot{\underline{q}}\,\underline{p} - L(\underline{q},\dot{\underline{q}},t)$

$\dot{\underline{q}}$ durch $\underline{p}$ ersetzt

Dabei sind

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

zu $q_i$ kanonisch konjugierter Impuls

Wir drücken die $\dot{q}_i$ in $H = \underline{p}\,\dot{\underline{q}} - L(\underline{q},\dot{\underline{q}},t)$

aus als $\dot{q}_i(\{q_i\},\{p_i\},t)$.

Betrachte Zeitableitung

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - L \quad = \sum_{i=1}^{f}\left(\dot{p}_i\dot{q}_i + \cancel{p_i\ddot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - \cancel{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i}\ddot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial t}\right)$$

Schreiben als Differential

$$d\mathcal{H} = \sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial t}dt\right)$$

$$= \sum_i\left(\dot{q}_i\,dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i - \frac{\partial L}{\partial t}dt\right)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \;; \qquad -\frac{\partial L}{\partial t} = \partial H/\partial t$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Für Lösungen von Lagrange II, $\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (*)$

gilt $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}p_i = \dot{p}_i$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Hamiltonsche Gleichungen.

Satz: Lagrange II (*) ist äquivalent zu Hamilton.

von der Hamiltonfunktion durch Legendretrafo zur Lagrangefunktion, d.h.

$$\mathcal{L}[\mathcal{H}](q,\dot{q},t) = p\dot{q} - \mathcal{H}(q,p,t) = L(q,\dot{q},t)$$

hier $p = p(q,\dot{q},t)$

## Konservative Systeme

Teilchen der Masse $m$ im Potential $V(q,t)$ in $d$ Dimensionen.

kin. Energie $T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$

$$L = T - V$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$$

Damit folgt $T = \frac{p^2}{2m}$.

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + V$$

$$= \frac{p^2}{2m} + V = \underline{T+V}$$

Gesamtenergie!

Beispiel: $T = \frac{1}{2} \dot{q} \underline{\underline{A}} \dot{q}$, quadr. Matrix $\underline{\underline{A}}$ mit $\det A > 0$

z.B. $\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \dots$

oder $\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dots$

Damit $L = T - V$, $V = V(q,t)$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \underline{\underline{A}} \dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \underline{\underline{A}}^{-1} p \quad \S$$

$$\Rightarrow p\dot{q} = \dot{q} \underline{\underline{A}} \dot{q} = 2T \Rightarrow \quad *$$

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - L = 2T - T + V = T + V, \quad \text{explizit}$$

$$T \overset{*}{=} \frac{1}{2} p\dot{q} \overset{\S}{=} \frac{1}{2} p \underline{\underline{A}}^{-1} p$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = T + V = \frac{1}{2} p \underline{\underline{A}}^{-1} p + V.$$

Beispiel Bewegungsgl. für $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(q,t)$

$$\left.\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} = \underline{F(q,t)} \end{aligned}\right\} \text{Hamiltonsche Gl.}$$

System von zwei DGL 1. Ordnung bei Hamilton

statt eine DGL 2. Ordnung bei Newton,

nämlich $m\ddot{x} = F(x,t)$

1) Hamiltonfunktion als Erhaltungsgröße:

$$\frac{d}{dt}H = \sum_{i=1}^{f}\Big(\dot p_i \dot q_i - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \dot p_i}\dot q_i\Big) - \frac{\partial L}{\partial t} \overset{L\,II}{=} -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \implies H \text{ ist zeitlich konstant.}$$

2) Zyklische Koordinaten.

Def: $q_k$ zyklisch $\Longleftrightarrow \dfrac{\partial L}{\partial q_k} = 0$

Satz: Die zu zyklischen Koordinaten $q_k$ konjugierten verallg. Impulse sind Erhaltungsgrößen.

$$\dot p_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \overset{L\,II}{=} \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

## 4.3. Der Phasenraum

Def: Der Phasenraum $\Gamma$ eines mech. Systems mit $f$ Freiheitsgraden und Hamiltonfkt. $H(q,p,t)$ ist der Raum der $2f$ kanonischen Variablen $(q,p) =$

$(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f)$.

<u>**Def**</u>: Der Zustand (zur Zeit $t$) eines mech. Systems ist ein Punkt $\underline{X}(t) \equiv (q(t), p(t)) \in \Gamma$.

Zeitentwicklung: beschrieben durch die Kurve $t \to \underline{X}(t)$ im Phasenraum (Phasenraumtrajektorie).

Eindeutigkeit der Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen $\Longrightarrow$ Phasenraumtrajektorien können sich nicht schneiden.

Wie bei <u>Richtungsfeldern</u> bei DGL definieren wir

$$\underline{v}(\underline{X},t) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p}(X) \\ -\frac{\partial H}{\partial q}(X) \end{pmatrix};$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\dot{\underline{X}}(t) = \underline{v}(\underline{X},t)},$$

DGL im Phasenraum.

denn

$\Gamma$

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial H / \partial p \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}.$$

- $\underline{v}(\underline{X},t)$ ist Tangentialvektor an die Kurve $\underline{X}(t)$.

**Def:** Die Abbildung

$$\phi^t : \underline{X}(0) \to \underline{X}(t), \quad (q(0), p(0)) \to (q(t), p(t))$$

heißt **Hamiltonscher Fluß** oder Phasenraumfluss.

Sie beschreibt die **Zeitentwicklung** in der klassischen Mechanik (Dynamik).

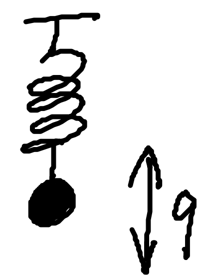
(QM : Zeitentwicklung erzeugt durch $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$

„Propagator", $\hbar = h/2\pi$ )

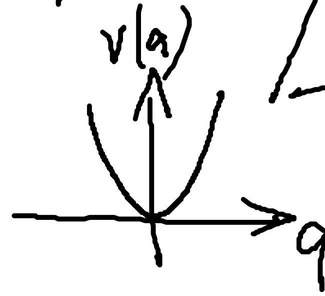
$h$ Planck-Konstante

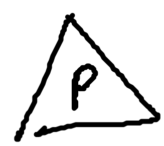
$\hat{H}$ : Hamilton-Operator. )

**Beispiel: Der harmonische Oszillator in $d=1$**




$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \Omega^2 q^2$$



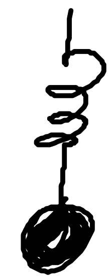

$$\Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\Omega^2 q \;\Big)$$

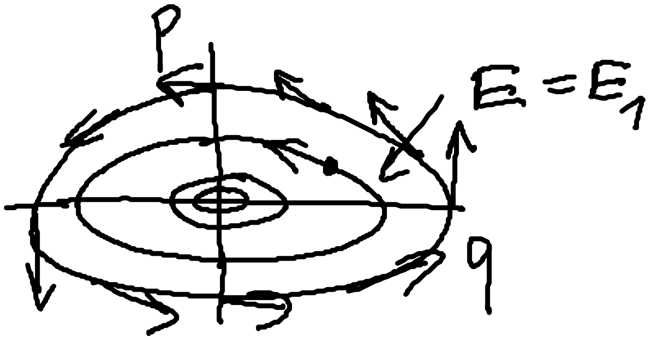
$$\dot{q} = \frac{p}{m}$$
$$\dot{p} = -m\Omega^2 q$$

$$\begin{pmatrix}\dot q\\ \dot p\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1/m\\ -m\Omega^2 & 0\end{pmatrix}}_{\underline{\underline{B}}}\begin{pmatrix}q\\ p\end{pmatrix}; \quad \dot{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}\,X$$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix}q\\ p\end{pmatrix}$$

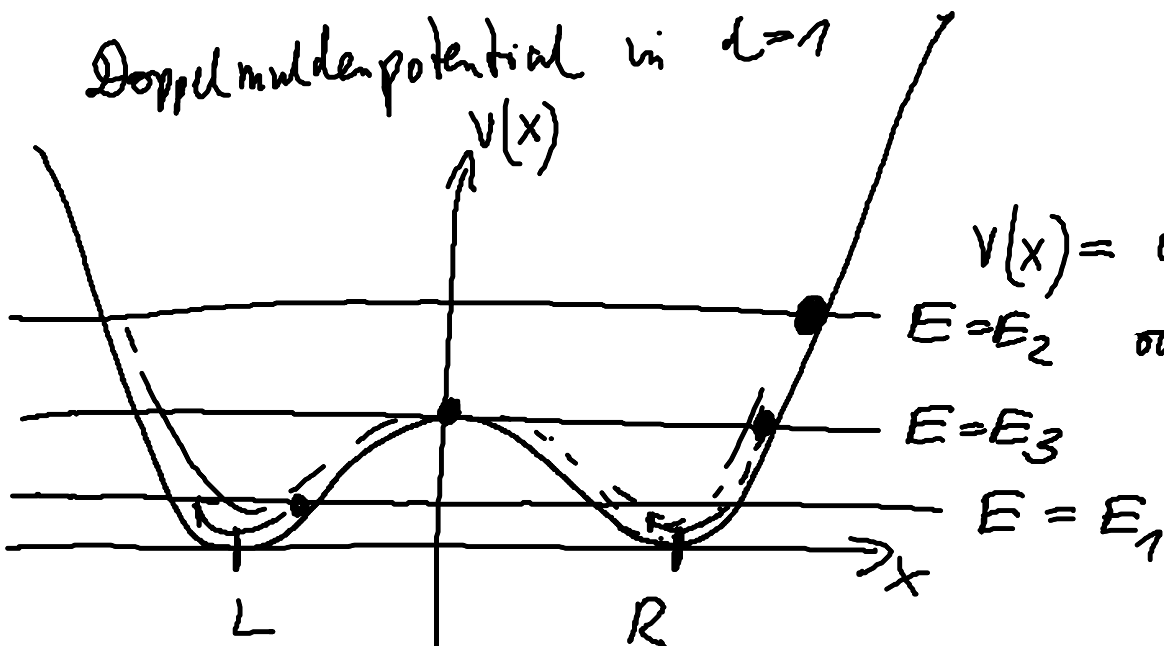


$$\mathcal{H} = E = p^2/2m + \tfrac{1}{2} m \Omega^2 q^2$$ beschreibt eine Ellipse

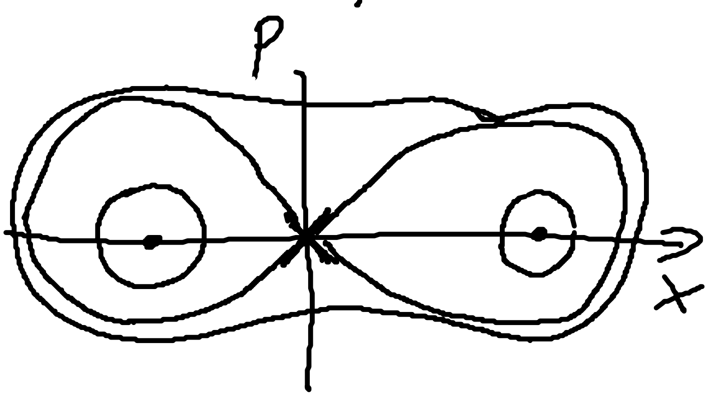



$$\dot{\underline{X}} = \underline{v}(X) = \underbrace{\begin{pmatrix}p/m\\ -m\Omega^2 q\end{pmatrix}}$$

Doppelmuldenpotential in $d=1$




$$V(x) = a x^4 - b x^2 + c$$




$\infty$ : „Separatrix"
nicht eine Kurve, sondern drei:
- ein Fixpunkt $X$
- zwei Kurven.