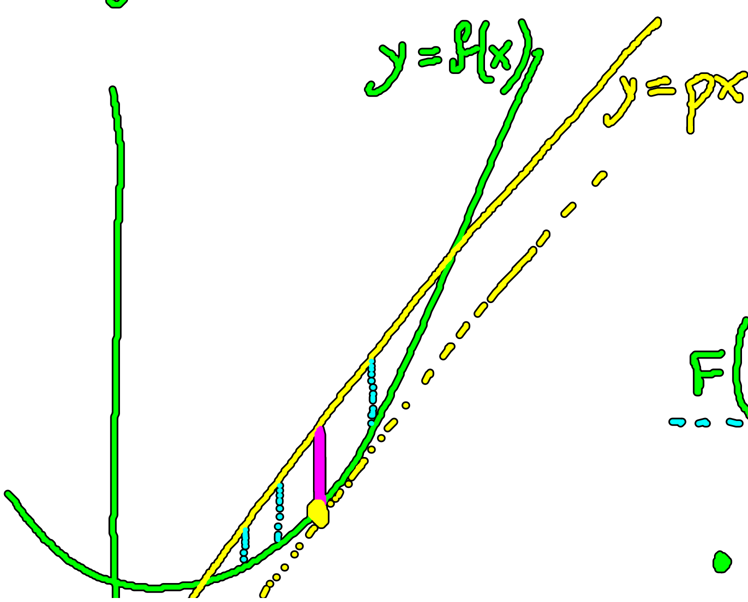
12.11.2008

12.11.2008

Legendre-Trafo: $f(x)$ sei konvex mit $f''(x) > 0$.

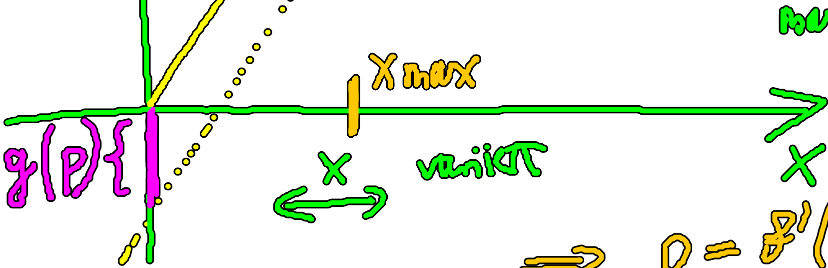


- feste Steigung p vorgeben
- Gerade durch 0 mit Steigung p
- Betrachte Abstand

$$F(x,p) = xp - f(x)$$

in vertikaler Richtung

- Finde x so, dass $F(x,p)$



maximal,

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,p) = \boxed{p - f'(x) = 0}$$

$$\Longrightarrow p = f'(x)$$

$$x_{max} = x(p)$$

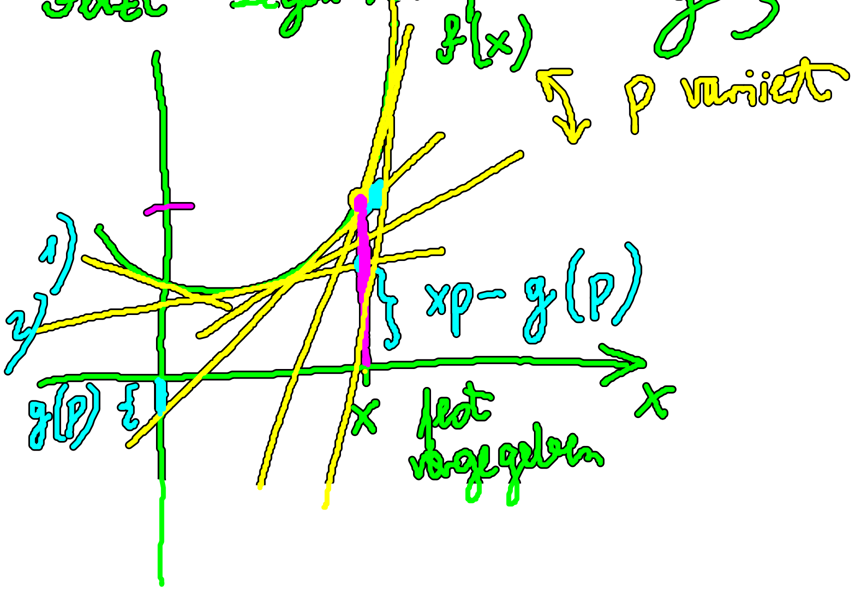
$$g(p) = \max_x \left[xp - f(x) \right]$$

$$g(p) = \max_x \; xp - f(x)$$ heißt

die Legendre-Transformierte der Funktion f,
man schreibt

$$g = \mathcal{L}[f], \quad g(p) = \mathcal{L}[f](p)$$

Jetzt Legendretrafo von g, d.h. $\mathcal{L}\mathcal{L}[g] \stackrel{?}{=} f$



$$\| \; f = \max_p \left(xp - g(p)\right) \; \|$$

Rolle von p, x vertauschen.

ARNOLD

$$\mathcal{L}\mathcal{L}[f] = f.$$

4.2. Hamiltonsche Gleichungen

Def.: mech. System mit f Freiheitsgraden und Lagrangefunktion $L(q_1,\dots,q_f;\dot q_1,\dots,\dot q_f;t)$

Dann heißt die Legendretransformierte von L

$$H(q_1,\dots,q_f;p_1,\dots,p_f;t)=\sum_{i=1}^{f}\dot q_i p_i - L(q_1,\dots,\dot q_f,t)$$

Hamiltonfunktion des Systems.

Wir schreiben $H(q,p,t)=\dot q p - L(q,\dot q,t)$

$\dot q$ durch p ersetzt

Dabei sind

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$$

zu q_i kanonisch konjugierte Impulse

Wir drücken die $\dot q_i$ in $H = p\dot q - L(q,\dot q,t)$ aus als $\dot q_i(\{q_i\},\{p_i\},t)$.

Betrachte Zeitableitung

$$\underline{\frac{d}{dt} H} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$H = \underbrace{p\dot{q}}_{} - L = \sum_{i=1}^{f} \left(\underbrace{\dot{p}_i \dot{q}_i + \cancel{p_i \ddot{q}_i}}_{} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \cancel{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} \ddot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial t} \right)$$

Schreiben als Differential

$$dH = \sum_i \left(\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_i}}_{} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \underbrace{dp_i}_{} + \frac{\partial H}{\partial t} dt \right)$$

$$= \sum_i \left(\dot{q}_i \underbrace{dp_i}_{} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \right)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad -\frac{\partial L}{\partial t} = \partial H / \partial t$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Für Lösungen von Lagrange II, $\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ (*)

gilt $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Hamiltonsche Gleichungen.

P

Satz: Lagrange II (*) ist
äquivalent zu Hamilton.
von der Hamiltonfunktion durch Legendretrafo
zur Lagrangefunktion, d.h.

$$\mathcal{L}[\mathcal{H}](q,\dot{q},t) = p\,\dot{q} - \mathcal{H}(q,p,t) = L(q,\dot{q},t)$$

hier $p = p(q,\dot{q},t)$

Konservative Systeme

Teilchen der Masse m im Potential $V(q,t)$ in d Dimensionen.

kin. Energie $T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$

$$L = T - V$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$$

Damit folgt $T = \frac{p^2}{2m}$.

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + V$$

$$= \frac{p^2}{2m} + V = \underline{T+V}$$ Gesamtenergie!

Beispiel: $T = \frac{1}{2}\dot{q}\,\underline{A}\,\dot{q}$, quadr. Matrix $\underline{\underline{A}}$ mit $\det A > 0$

z.B. $\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \dots$

oder $\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dots$

Damit $L = T - V$, $V = V(q,t)$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \underline{\underline{A}}\,\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \underline{\underline{A}}^{-1} p$$

$$\Rightarrow p\dot{q} = \dot{q}\underline{\underline{A}}\dot{q} = 2T \Rightarrow \quad *$$

$$H = p\dot{q} - L = 2T - T + V$$
$$= T + V, \quad \text{explizit}$$

$$T \stackrel{*}{=} \frac{1}{2} p\dot{q} = \frac{1}{2} p \underline{\underline{A}}^{-1} p$$

$$\Rightarrow \quad H = T + V = \frac{1}{2} p \underline{\underline{A}}^{-1} p + V.$$

Beispiel Bewegungsgl. für $H = \frac{p^2}{2m} + V(q,t)$

$$\left.\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} = \underline{F(q,t)} \end{aligned}\right\} \text{Hamiltonsche Gl.}$$

<u>System</u> von zwei DGL 1. Ordnung bei Hamilton

statt eine DGL 2. Ordnung bei Newton,

nämlich $m\ddot{x} = F(x,t)$

1) Hamiltonfunktion als Erhaltungsgröße:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{f}\Big(\dot{p}_i\dot{q}_i - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i}\dot{q}_i\Big) - \frac{\partial L}{\partial t} \stackrel{L\,II}{=} -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Longrightarrow$$ $\mathcal{H}$ ist zeitlich konstant.

2) Zyklische Koordinaten.

Def: q_k zyklisch $\Longleftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$

Satz: Die zu zyklischen Koordinaten q_k konjugierten verallg. Impulse sind Erhaltungsgrößen.

$$\dot{p}_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \stackrel{L\,II}{=} \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

4.3. Der Phasenraum

Def: Der Phasenraum Γ eines mech. Systems mit f Freiheitsgraden und Hamiltonfkt. $\mathcal{H}(q,p,t)$ ist der Raum der $2f$ kanonischen Variablen $(q,p) =$

$(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f)$.

Def: Der Zustand (zur Zeit t) eines mech. Systems ist ein Punkt $\underline{X}(t) \equiv (\underline{q}(t), \underline{p}(t)) \in \Gamma$.

Zeitentwicklung: beschrieben durch eine Kurve $t \to \underline{X}(t)$ im Phasenraum (Phasenraumtrajektorie).

Eindeutigkeit der Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen $\Longrightarrow$ Phasenraumtrajektorien können sich nicht schneiden.

Wie bei Richtungsfeldern bei DGL definieren wir

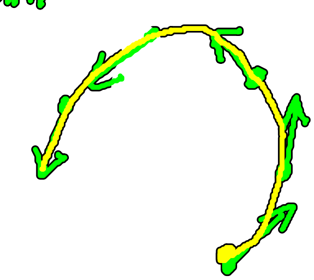
$$\underline{v}(\underline{X}, t) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p}(\underline{X}) \\ -\frac{\partial H}{\partial q}(\underline{X}) \end{pmatrix};$$

$$\Longrightarrow \boxed{\dot{\underline{X}}(t) = \underline{v}(\underline{X}, t)},$$

DGL im Phasenraum.

denn

Γ



$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{q}} \\ \dot{\underline{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial H / \partial \underline{p} \\ -\frac{\partial H}{\partial \underline{q}} \end{pmatrix}.$$

- $\underline{v}(\underline{X}, t)$ ist Tangentialvektor an die Kurve $\underline{X}(t)$.

Def: Die Abbildung

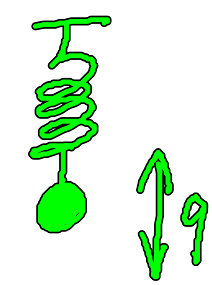
$$\phi^t : \underline{X}(0) \to \underline{X}(t), \qquad (q(0), p(0)) \to (q(t), p(t))$$

heißt Hamiltonscher Fluß oder Phasenraumfluss.

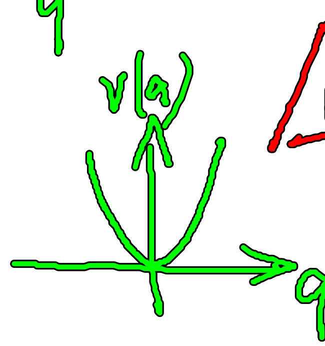
Sie beschreibt die Zeitentwicklung in der klassischen Mechanik (Dynamik).

(QM : Zeitentwicklung erzeugt durch $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ „Propagator", $\hbar = h/2\pi$)
h Planck-Konstante
$\hat{H}$: Hamilton-Operator.)

Beispiel: Der harmonische Oszillator in $d=1$



$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \Omega^2 q^2$$



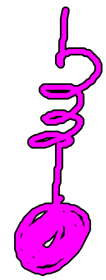
$$\Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\Omega^2 q \;,$$

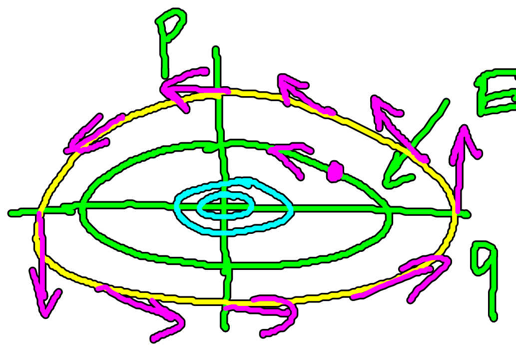
$$\dot{q} = \frac{p}{m}$$
$$\dot{p} = -m\Omega^2 q$$

$$\begin{pmatrix}\dot q\\ \dot p\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1/m\\ -m\Omega^2 & 0\end{pmatrix}}_{\underline{\underline{B}}}\begin{pmatrix}q\\ p\end{pmatrix}; \quad \underline{\dot X} = \underline{\underline{B}}\,\underline{X}$$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix}q\\ p\end{pmatrix}$$

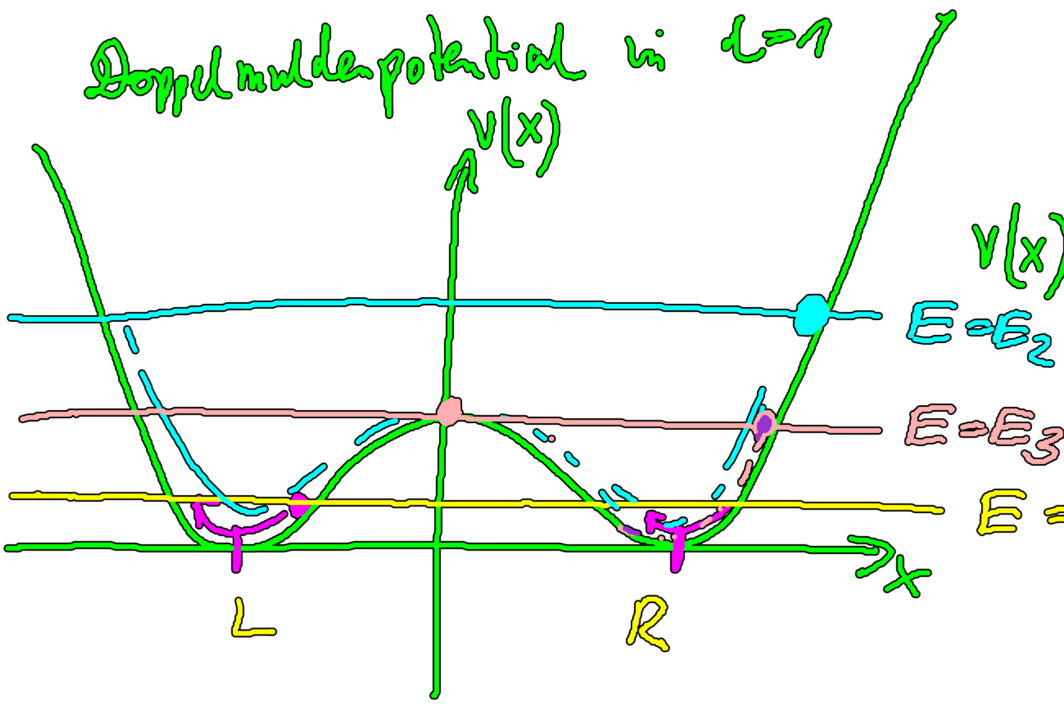


$$H = E = p^2/2m + \tfrac{1}{2} m \Omega^2 q^2$$ beschreibt eine Ellipse

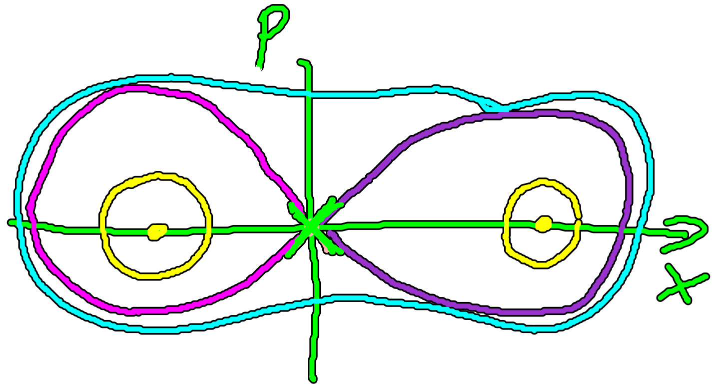


$$\underline{\dot X} = \underline{v}(\underline{X}) = \underbrace{\begin{pmatrix}p/m\\ -m\Omega^2 q\end{pmatrix}}$$

Doppelmuldenpotential in $d=1$



$V(x) = ax^4 - bx^2 + c$ oder so.



∞ : „Separatrix"
nicht eine Kurve,
sondern drei:
– ein Fixpunkt X
– zwei Kurven.