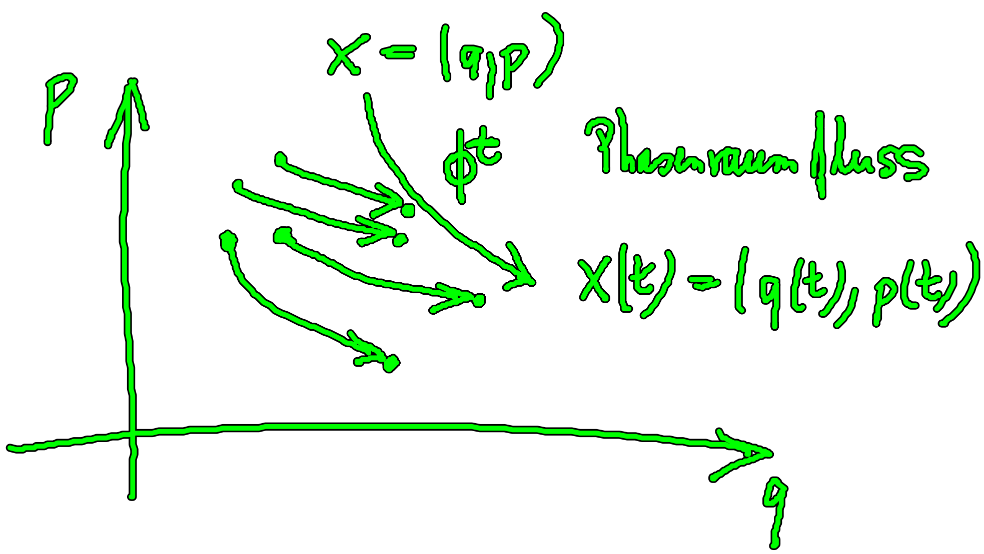
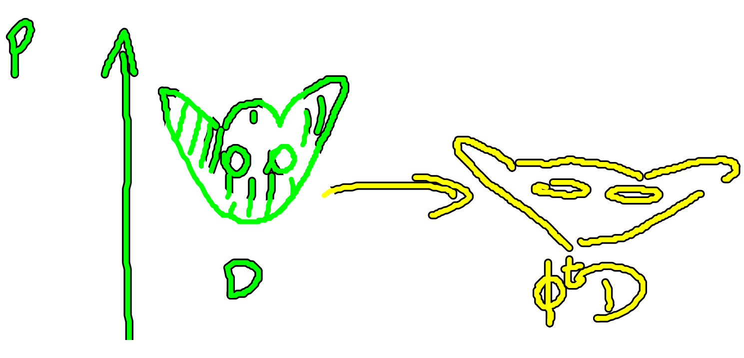
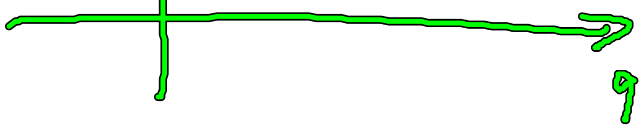
18.11.08

18.11.08







Satz von Liouville: $\mathrm{vol}(\phi^t D) = \mathrm{vol}(D)$

bei $\phi^t: X(0) \to X(t)$.

bei $\underline{\dot{X}} = \underline{v}(\underline{X})$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} \partial H/\partial p \\ -\partial H/\partial q \end{pmatrix}$

$\underline{X} = (q, p) = (q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f)$.

Etwas allgemeiner $\underline{\dot{X}} = f(\underline{X})$ mit $\operatorname{div} \underline{f} = 0$

(Hier $\operatorname{div} \underline{v} = (\partial/\partial q, \partial/\partial p)\underline{v} =$

$$= \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

Bew.: Zeitentwicklung für kurze Zeiten t

$$\underline{\dot{X}} = \underline{f}(X) \to \underline{X}(t) = \int_0^t dt' \underline{f}(\underline{X}(t')) + \underline{X}(0)$$

$$= \underline{X}(0) + f(\underline{X}(0))t + \dots O(t^2)$$

1) $v(t) = \int d\underline{X}$

$\phi^t D$

$$= \int_D \det \frac{\partial \phi^t \underline{x}}{\partial \underline{x}} d\underline{x}$$

Transformationsformel mit Det. der

Jacobi-Matrix $\dfrac{\partial \underline{X}(t)}{\partial \underline{x}}$

$$\begin{vmatrix} \partial X_1(t)/\partial x_1 & \partial X_2(t)/\partial x_1 \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \phi^t \underline{x}}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left(\underline{x} + \underline{f}(\underline{x}) \cdot t + O(t^2) \right)$$

$$= E + t \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} + \ldots, \qquad t \to 0.$$

$$\begin{pmatrix} \partial x/\partial x & \partial x/\partial y & \partial x/\partial z \\ \partial y/\partial x & \partial y/\partial y & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $\det(E + tA) = 1 + t \operatorname{Tr} A + O(t^2)$ "Tr Trace" $t \to 0$

$\operatorname{Tr} A = \sum_i A_{ii}$

Beweis: Ausrechnen von $\begin{vmatrix} 1+tA_{11} & tA_{12} \\ tA_{21} & 1+tA_{22} \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}$

3)

$$\det \frac{\partial \phi^t x}{\partial x} = \det\left(E + \frac{\partial f}{\partial x} t + O(t^2)\right)$$

$$= 1 + t \operatorname{Tr} \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} + O(t^2)$$

$$= 1 + t \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + O(t^2)$$

$$= 1 + t \operatorname{div} \underline{f} + O(t^2)$$

$$= 1 + t \cdot 0 + O(t^2), \quad t \to 0$$

(wegen $\operatorname{div} \underline{f} = 0$), deshalb

$$v(t) = \int_D \det \frac{\partial \phi^t x}{\partial x} \, d\underline{x}$$

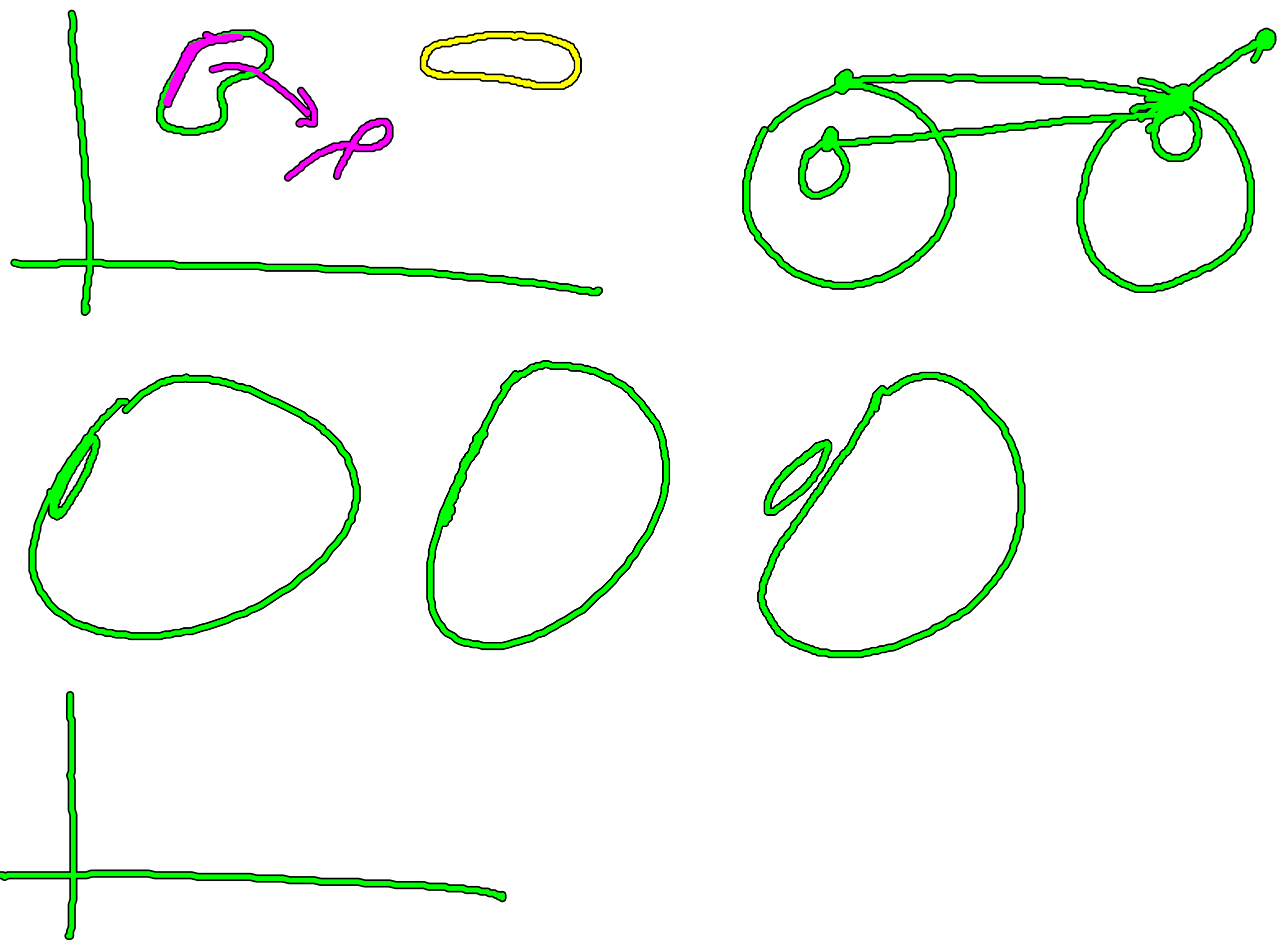
$$\left.\frac{d}{dt} v(t)\right|_{t=0} = \int_{D(0)} \operatorname{div} \underline{f} \, d\underline{x} = 0$$

Entsprechend für alle anderen Zeiten $t_0 > 0$

$d/dt \, v(t)\big|_{t_0} = 0$, denn $\operatorname{div} \underline{f} = 0$ (stets).

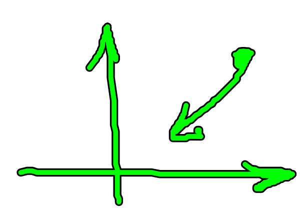
⇒ Das Volumen des Gebietes $D(t)$ ändert sich zeitlich überhaupt nicht.

Hier $\underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \partial H/\partial p \\ -\partial H/\partial q \end{pmatrix}$



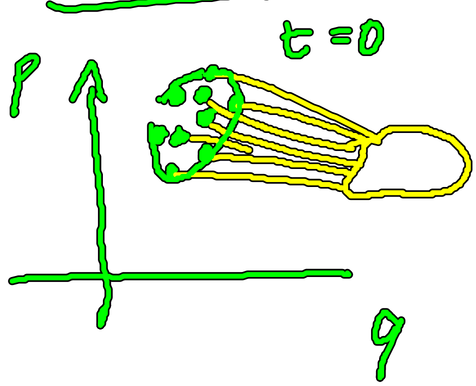
Jetzt $N \gg 1$ mechanische Systeme, alle gleichzeitig

Als Punkte im Phasenraum Γ



eines einzelnen Systems

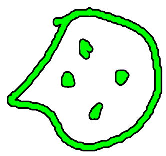
$t=0$



„Ensemble" von N Teilchen.

Phasendichte ρ: Betrachte Anzahl dN von Punkten im Volumenelement dV; Jeder Punkt entspricht einem Mitglied des Ensembles.

$dN = 4$



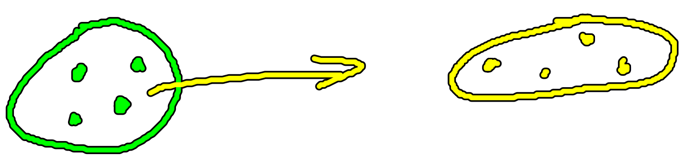
dV

in der Umgebung eines Phasenraumpunkts $\underline{X}$

$\rho(\underline{X})\, dV$ = Anzahl der Mitglieder im Volumen dV

Jetzt Zeitentwicklung:

$$\rho(\underline{X}) = \frac{dN}{dV}$$



$dN =$ const
$dV =$ const

Daraus folgt

$$\rho(q, p, t) = \text{const}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\rho(q, p, t) = 0}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\rho(q,p,t) = \frac{\partial\rho}{\partial q}\dot q + \frac{\partial\rho}{\partial p}\dot p + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial\rho}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial\rho}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

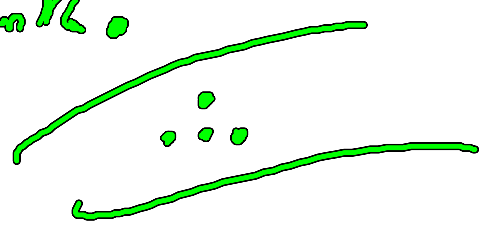
$$= \frac{\partial}{\partial q}\left(\rho\frac{\partial H}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial p}\left(\rho\frac{\partial H}{\partial q}\right) - \rho\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}\right]}_{\mathrm{div}\, v = 0} + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$= \mathrm{div}(\rho\underline{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

$$\underline{j} \equiv \rho\underline{v} = \rho\begin{pmatrix}\partial H/\partial p \\ -\partial H/\partial q\end{pmatrix}$$ Phasenraum-Stromdichte

$$\boxed{\mathrm{div}(\rho\underline{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung}}$$

Vgl. Elektrodynamik.



Sei g eine Funktion im Phasenraum Γ

Zeitentw.: $\frac{d}{dt} g = \frac{\partial g}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial g}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial g}{\partial t}$

$$= \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial t}$$

$$= \{H, g\} + \frac{\partial g}{\partial t} \qquad (*)$$

Poisson-Klammer:

$$\{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}$$

(Analog in der QM)

Eigenschaften der Poisson-Klammern

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

$$\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\}$$

$$\{\alpha, f\} = 0$$

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$$

$$0 = \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}$$

Jacobi-Identitäts.

gelten auch für Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ der QM oder für das Kreuzprodukt.

Lie-Algebra.

Erhaltungsgrößen: g Erhaltungsgröße

$$\Longleftrightarrow \quad \{H, g\} + \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

Beispiel: $g = \mathcal{H} = \mathcal{H}(p, q) \Rightarrow \{H, H\} = 0$

Poissonsches Theorem: f, g Konstanten der Bewegung.

$\Rightarrow \{f, g\}$ ist Konstante der Bewegung.

Bew: $$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \{H, \{f, g\}\} =$$

$$= -\{f, \underbrace{\{g, H\}}_{0}\} - \{g, \underbrace{\{H, f\}}_{0}\} = 0.$$

Kanonische Poisson Klammern:

q_k, p_k

$$\Rightarrow \quad \{q_k, p_l\} = \delta_{kl}$$
$$\{q_k, q_l\} = 0$$
$$\{p_k, p_l\} = 0$$

$\hat{=}$ kanon. Vertauschungsrelationen der QM, z.B. $[q, p] = i\hbar$
$\hbar = h/2\pi$.

Kanonische Transformationen

1) Punkttransformationen $\underline{Q} = \underline{Q}(q, t)$

nur die Ortskoordinaten werden transformiert, z.B.

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi.$$

Hamilt. Prinzip $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L = 0$

$\Rightarrow$ EL: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$. in den q-Koord.

Sei $\underline{Q}(q, t)$ eine Punkt-Trafo. der f verallg. KO.

$$L \to L'(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}, t) = L(q(Q, t), \dot{q}(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}, t), t)$$

Dann gilt

$$\delta S[L] = 0 \Longleftrightarrow \delta S[L'] = 0,$$

und die zugehörigen EL-Gleichungen sind

Forminvarianz

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot Q}-\frac{\partial L}{\partial Q}=0$$

Exzessiver Gebrauch der Kettenregel:

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot Q}=\frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{\partial \dot q}{\partial \dot Q}=\frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{\partial q}{\partial Q}$$ „Kürzen von Punkten"

$$\frac{\partial L'}{\partial Q}=\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial Q}+\frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{\partial \dot q}{\partial Q}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot Q}-\frac{\partial L'}{\partial Q}=\underbrace{\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}-\frac{\partial L}{\partial q}\right]}_{0}\frac{\partial q}{\partial Q}-\frac{\partial L}{\partial \dot q}\left[\frac{\partial \dot q}{\partial Q}-\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial q}{\partial Q}}_{\partial \dot q/\partial Q}\right]=0$$

Nicht verwechseln mit Eichtrafos

$$L(q,\dot q,t)\rightarrow L'(q,\dot q,t)+\frac{d}{dt}h(q,t)$$

Variationsprinzip für die Hamiltonschen Gl.

Satz: Aus dem Var-Prinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L_H(q, p, \dot q, t) = 0$$

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$
$$\delta p(t_1) = \delta p(t_2) = 0$$

$$L_H = p\dot q - H(q, p, t)$$

folgen die Hamiltonschen Gleichungen.

(REBHAN).

Beweis: Anwendung unseres Theorems (. .).

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_H}{\partial \dot q} - \frac{\partial L_H}{\partial q} = 0; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L_H}{\partial \dot p} - \frac{\partial L_H}{\partial p} = 0$$

als notwendige Bedingungen mit $L_H = p\dot q - H$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} p = -\frac{\partial H}{\partial q}; \quad 0 = \dot q - \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot q = \frac{\partial H}{\partial p}.$$