1 Aufgabe 21: (Blatt)

Legendre Trafo - Aufgabe:

1 a) Bestimme die Legendre Trafo von

$$f_1(x) = \alpha x$$
$$f_2(x) = \frac{1}{2} m x^2$$
$$f_3(x) = e^{\alpha x}$$
$$f_4(x) = \beta (x-\gamma)^2$$
$$f_5(x) = x^\alpha / \alpha$$

b) Extra: $L(x, \dot{x}) = \alpha(x)\dot{x} - V(x)$

falsche Aufgabe. So verändern, dass die Aufgabe „funktioniert".

Hamilton-Jacobi-Theorie

Erzeugende $F_2(q, P, t) = S$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}; \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P};$$

$$K = \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad S = (q, P, t).$$

Idee: Trafo auf neue Hamiltonfkt $K = 0$.

Hamilt. Gleichungen: $\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0$ P_i zyklisch

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \quad Q_i \text{ zyklisch}$$

$\Rightarrow Q_i = \alpha_i = \text{const}; \; P_i = \beta_i = \text{const},$

$i = 1, \dots, f$

$$q_i = q_i(Q_i, P_i, t) = q_i(\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}, t)$$

$$p_i = p_i(Q_i, P_i, t) = p_i(\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}, t).$$

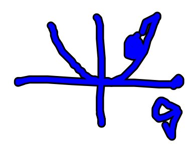
Hier ist zu lösen: $\quad K = H + \dfrac{\partial S}{\partial t} = 0$

$$\boxed{\frac{\partial S(q, P, t)}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0}$$

Hamilton-Jacobi-Differentialgl.

- Das ist eine nichtlineare partielle DGL $\quad$ z.B. $q = (x, y)$
- Die Funktion $S(q, P, t)$ definiert eine „Fläche" über dem Konfigurationsraum der q" $\left(\begin{matrix} P = \text{const} \\ t = \text{Parameter} \end{matrix} \right)$.

Konkretes Beispiel: harmonischer Oszillator $d = 1$



$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \Omega^2 q^2, \quad q \text{ Ortskoo.}$$

Darin $p = \dfrac{\partial S}{\partial q}$ einsetzen

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} m \Omega^2 q^2 = 0. \quad \text{H.Jac. Gl.}$$

Jetzt additiver Separationsansatz

$$S(q, t) = f(t) + g(q).$$

$$\Rightarrow \quad -\dot{f}(t) = \frac{1}{2m} \left(g'(q) \right)^2 + \frac{1}{2} m \Omega^2 q^2 = \beta \equiv P$$

$= \text{Konstante}$

diese Konstante hat dim. erg.

1) $f(t) = -P(t-t_0)$

2) $g'(q) = \sqrt{2mP - (m\Omega q)^2}$

$\Rightarrow g(q) = \int dq' \sqrt{2mP - (m\Omega q')^2}$

Neue Ortsko: $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(f(t) + g(q)\right)$

$= -(t-t_0) + \frac{\partial}{\partial P}\int dq \sqrt{2mP - (m\Omega q)^2}$

$= -(t-t_0) + m\int \frac{dq}{\sqrt{2mP - (m\Omega q)^2}} =$

$= -(t-t_0) + \frac{1}{\Omega} \arcsin \sqrt{\frac{m\Omega^2}{2P}}\, q$

Q, P sind Konstanten

Auflösen: $q = q(t) = \sqrt{\frac{2P}{m\Omega^2}} \sin\Omega(t - t_0 + Q)$

Das ist die bekannte Lösung für den 1d Oszillator

P : Gesamtenergie

Q : Zeitnullpunkt

Die Funktion $S(q,P,t)$ wird als Hamiltonsche Wirkungsfunktion (Prinzipalfunktion) bezeichnet. $\partial S/\partial t + H = 0$

$$\frac{d}{dt} S = \frac{\partial S}{\partial q}\dot q + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial P}\dot P}_{0} + \frac{\partial S}{\partial t} =$$

$$(\partial S/\partial q = p) \quad = p\dot q - \mathcal{H} = L,$$

denn $\mathcal{H} = p\dot q - L$ mit der Lagrange-Funktion L. Also gilt

$$\frac{d}{dt} S = L \overset{\int dt}{\Longrightarrow} S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L$$

Also ist S das Wirkungsfunktion, das wir bereits aus dem Hamiltonschen Prinzip kennen.

Jetzt allgemein: falls die Zeit t nicht explizit in $\mathcal{H}$ auftritt, d.h. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q,P)$, macht man den Ansatz $\quad p = \frac{\partial S}{\partial q}$

$$S(q,P,t) = W(q,\underline{P}) - Et,$$

in $\partial S/\partial t + \mathcal{H} = 0$ einsetzen

$$\Rightarrow \quad -E + \mathcal{H}\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}(q,P)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H}\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E$$

„verkürzte Hamilton-Jacobi-Gleichung"

$W(q,P)$: verkürzte Wirkung.

Alternativ kann $\mathcal{H}\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right)=E$ folgendermaßen hergeleitet werden:

- konservatives System mit Energieerhaltung: $\mathcal{H}=E$
- Suche kan. Trafo, die nur die Ortskoordinaten Q_i zyklisch, d.h.:

$$K=K(P_1,\dots,P_f)=K(\underline{P})$$

$$\Rightarrow \dot{P}_i=\frac{\partial K}{\partial Q_i}=0$$

- Die zugehörige erzeugende Funktion $F_2(q,P)=W(q,P)$ erfüllt $p=\frac{\partial W}{\partial q}$, $\frac{\partial W}{\partial t}=0$

$$\Rightarrow \quad K=H+\frac{\partial W}{\partial t}=\mathcal{H}$$

$$\boxed{K(\underline{P})=\mathcal{H}\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}(q,\underline{P})\right)}$$

verkürzte Ham. Jac. Diff. gl.

neue Ortskoordinaten $\dot{Q}_i=\frac{\partial K(\underline{P})}{\partial P_i}\equiv\omega_i=\underline{\text{const}}$

$$\Rightarrow \underline{Q_i(t)=\omega_i t+\beta_i}$$

Beispiel: Teilchen in $d=2$, $V(q)=\text{const}=V$

$$\mathcal{H}(q,p)=\frac{p^2}{2m}+V \qquad q=(x,y)$$

Ham.-Jac: $H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E$

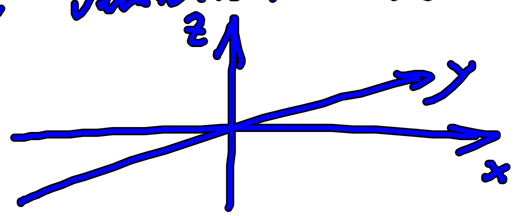
$\Rightarrow \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial \underline{q}}\right)^2 + V = E$, Bemerkung: $\frac{\partial W}{\partial \underline{q}} = \underline{\nabla}_{\underline{q}} W$

Ansatz: $W(\underline{q}, \underline{P}) = \underline{P} \cdot \underline{q} = P_x q_x + P_y q_y$

$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial \underline{q}} = \underline{\nabla}_q W = \underline{P}$, einsetzen.

$\frac{1}{2m} \underline{P}^2 = E - V.$

Die Funktion $z = W(\underline{q}) = \underline{P} \cdot \underline{q} = P_x x + P_y \cdot y$.



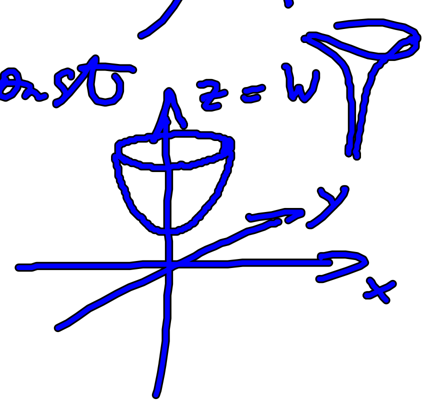
Fläche über der x-y-Ebene

geometrische Bedeutung der Wirkungs ; Wirkungswellen

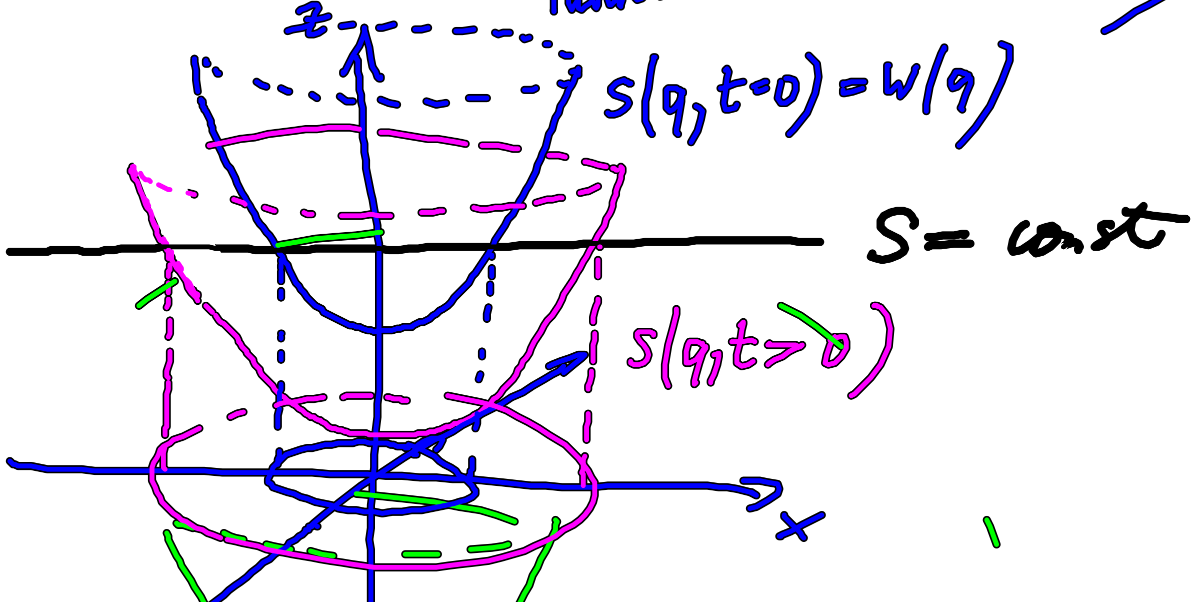
Unsere Def. war $S(q, P, t) = W(q, P) - E \cdot t$

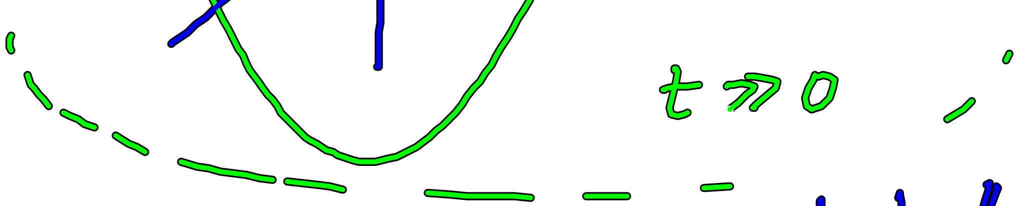
(Zeit abseparieren).

- Betrachte alle Punkte $\underline{q}$ im Konfig. Raum, auf denen $S(q, t) = W(q) - Et = \text{const}$



- Beispiel: $W(\underline{q}) = \underline{q}^2$ Paraboloid





Ausbreitungsgeschw. der „Wellenfronten":

die „Phase" $S = \text{const} \Rightarrow dS = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = d(W - Et) = dW - E\,dt$$

$$0 = \underline{\nabla} W \dot{\underline{q}} - E \,; \quad \boxed{\underline{\nabla} W \dot{\underline{q}} = E}$$

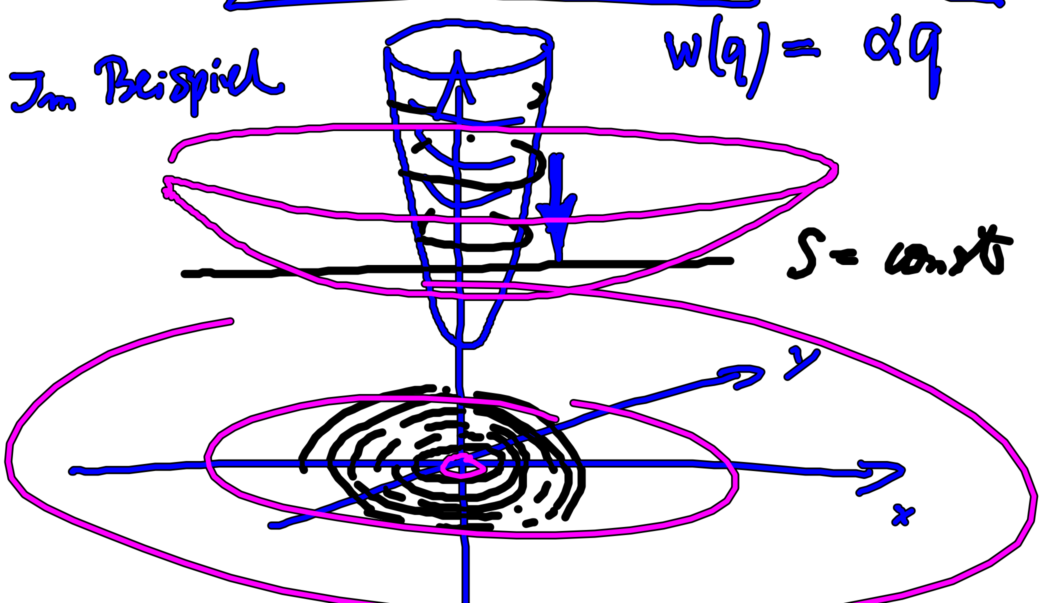
Geschwindigkeitsvektor soll $\perp$ auf der Wellenfront, d.h. $\parallel$ zum Gradienten

$$\underline{\nabla} W \Rightarrow \quad \dot{\underline{q}} \parallel \underline{\nabla} W \Rightarrow$$

$$\underline{\nabla} W \cdot \dot{\underline{q}} = |\nabla W| \cdot |\dot{\underline{q}}| = |\nabla W| \cdot \underbrace{c(\underline{q})}_{\text{„Phasengeschw."}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c(\underline{q}) = \frac{E}{|\underline{\nabla} W|}}$$

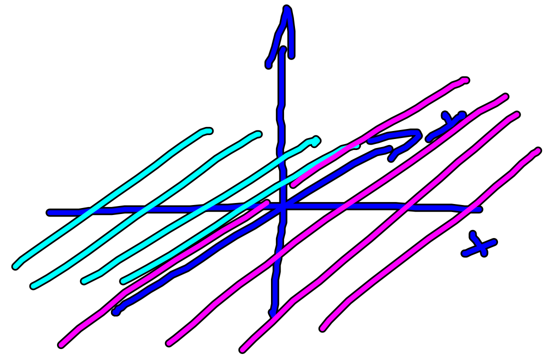
Im Beispiel $\quad W(q) = \alpha q^2$



Beispiel: $\quad d = 2, \; \underline{q} = (x, y),$ Potentialschwelle

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x,y),$$

$$V(x,y) = \begin{cases} V_L, & x\le 0\\ V_R, & x>0\end{cases}$$



Löse Ham.-Jac. $\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E$

mit Ansatz

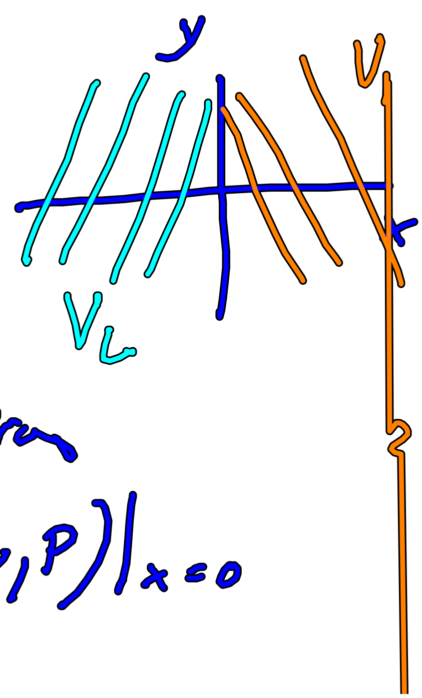
$$W(q,P) = \begin{cases} P_L\cdot q, & x\le 0 \\ P_R\cdot q, & x\ge 0\end{cases}$$

Einsetzen: $p = \frac{\partial W}{\partial q}$ in $\mathcal{H} = E$

$$\Rightarrow \quad \frac{P_L^2}{2m} = E - V_L \qquad (x\le 0)$$

$$\frac{P_R^2}{2m} = E - V_R$$

Es gilt: $p = \frac{\partial W}{\partial q} = \begin{cases} P_L & x\le 0\\ P_R & x\ge 0\end{cases}$



$P_{L/R}$ sind die wirklichen Impulse für $x\le 0$ $(x\ge 0)$

- Bei $x=0$: Knick in der Bahn $q(t)$.

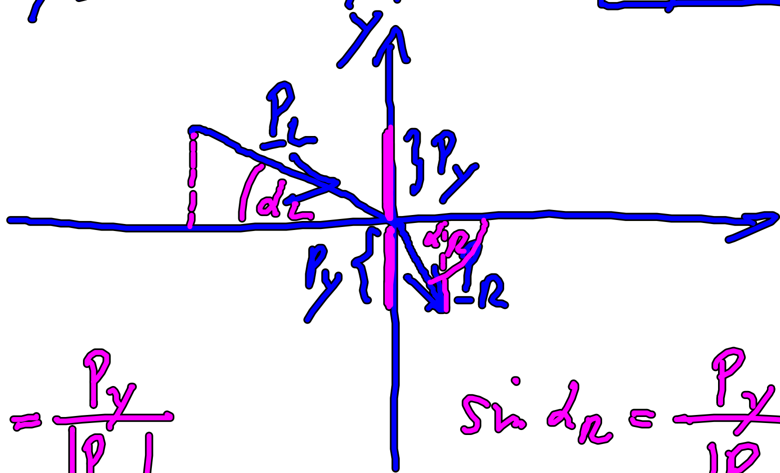
Forderung: $W(q,P)$ sei stetige Funktion

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \underbrace{W(x-\varepsilon,y,P)}\Big|_{x=0} = \lim_{\varepsilon\to 0} W(x+\varepsilon,y,P)\Big|_{x=0}$$

links

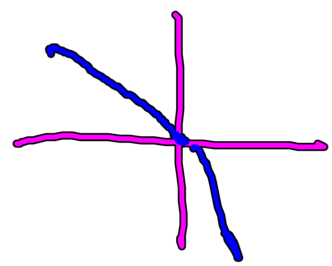
$$p_L\,\varphi_{x-\varepsilon} = p_R\,\varphi_{x+\varepsilon}\Big|_{x=0}$$

$$\Rightarrow \quad p_{Ly}\cdot y = p_{Ry}\cdot y \Rightarrow \boxed{p_{Ly} = p_{Ry}}$$



$$\sin\alpha_L = \frac{p_y}{|p_L|} \qquad \sin\alpha_R = \frac{p_y}{|p_R|}$$

$$\frac{\sin\alpha_L}{\sin\alpha_R} = \frac{|p_R|}{|p_L|} = \frac{\sqrt{E-V_R}}{\sqrt{E-V_L}}$$



Völlig analog zum Brechungsgesetz von Snell (Snellius)