26. 11.

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

$S = W - Et$, W verkürzte Wirkung

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \nabla_q W(q);$$

$$H = E \Rightarrow \frac{1}{2m}(\nabla W)^2 = E - V(q).$$

Eikonalgleichung in der Optik q: Ort

Wellengleichung

$$\Delta u(q,t) - \frac{n^2(q)}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(q,t) = 0$$

u: eine Komponente z.B. des E-Feldes

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$n(q)$: Brechungsindex.

Fall: $n(q) = n = const$

Wellengl. hat Lösungen

$$u_{\underline{k}}(q,t) = u_{\underline{k}}\, e^{i(\underline{k}q - \omega t)}$$

"ebene Wellen"

↑ Amplitude

Auch Superpositionen sind Lösungen.

$\underline{k}$: Wellenvektor; $|\underline{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\,\omega}{c}$ "Dispersionsrelation"

λ Wellenlänge

zwischen Winkelfrequenz ω und Wellenlänge λ.

Fall 2: $n(q)$ ortsabhängig:

i.A. nicht mehr lösbar $\Delta u - \frac{n^2(q)}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 0$

(Näherungs) Ansatz

$$u(q,t) = e^{A(q) + i(k_0 L(q) - \omega t)}$$

einsetzen

$k_0 = |\underline{k}_0| = \frac{\omega}{c}$, $\underline{k}_0$ gibt die Richtung der Welle an.

Für $n(q) = n$: $\quad k_0 L(q) = n \underline{k}_0 q$

$$L(q) = n \frac{\underline{k}_0}{|\underline{k}_0|} \cdot q$$ „optische Weglänge"

„EIKONAL".

Jetzt einsetzen in die Wellengleichung $\Longrightarrow$

$$\underbrace{\Delta A(q) + \left(\underline{\nabla} A(q)\right)^2} + k_0^2 \overbrace{\left[n(q)^2 - \left(\underline{\nabla} L(q)\right)^2\right]} = 0$$

Δ = div grad

$\underline{\nabla}$ = grad

$k_0^2 = \left(2\pi/\lambda_0\right)^2$

λ_0 Wellenlänge im Vakuum

Näherung: für $\lambda_0 \ll$ typische Längenskala in $A(q)$, $n(q)$

vernachlässigen wir $\Delta A(q)$, $\underline{\nabla} A$ und erhalten die Eikonalgleichung $[\;] = 0$

$$\left(\underline{\nabla} L(q)\right)^2 = n(q)^2$$

Approximation der Wellengleichung im Grenzfall der geometrischen Optik.

Analogie:

$(\underline{\nabla} L)^2 = n(q)^2$ Optik: Eikonalgleichung

$(\underline{\nabla} W(q))^2 = 2m(E - V(q))$ Mechanik: verkürzte Ham.-Jac.-Gl. für Wirkung W

$W(q) - Et = \text{const}$ Mechanik: „Wellenfronten der Wirkung S"

$L(q) - \frac{\omega}{k_0} t = \text{const}$ Optik: Wellenfronten der Phase $k_0 L - \omega t$

$W(q) = \underline{k} \cdot q$ Mechanik: freies Teilchen

$L(q) = \underline{k} \cdot q$ Optik: freier Lichtstrahl $n = 1$.

Wellentheorie des Lichtes — ? QM! 20. Jhdt.

19. Jhdt.

Optik $(\nabla L)^2 = n^2$ — Mechanik $(\nabla W)^2 = 2m(E - V)$

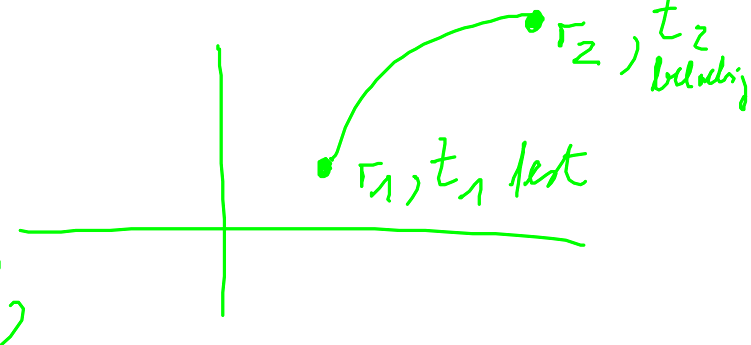
19. Jhdt.

Prinzip von Maupertuis.

Euler-Lagrange

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\underline{r})$$

1 Teilchen in $d=3$ Dimensionen.



verkürzte Wirkung

$$* \quad W(\underline{r}, E) = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}} \underline{p}(\underline{r}')\, d\underline{r}',$$

denn es war $\underline{p}(\underline{r}) = \underline{\nabla} W(\underline{r})$

hier ist die Energie E festgehalten (anders als beim Hamiltonschen Variationsprinzip, wo t_1 und t_2 fest waren aber verschiedene E zugelassen waren).

* wegunabhängiges Integral

Kurvenintegral

$$W(\underline{r},E) = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}} \underbrace{\underline{p}(\underline{r}')\, d\underline{r}'}_{\text{Skalarprodukt}} = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}} \underbrace{|\underline{\nabla} W(\underline{r}')| \cdot |d\underline{r}'| \cdot \cos\theta}_{\leq\, |\underline{\nabla} W(\underline{r}')| \cdot |d\underline{r}'|}$$

$$W(\underline{r},E) \leq \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}} |\nabla W|\, |d\underline{r}'| = \underbrace{\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}} \sqrt{2m(E - V(\underline{r}'))}\, |d\underline{r}'|}_{\text{immer größer als } W(\underline{r},E)}$$

Falls $\cos\theta = 1$ überall, dann „=“.

das ist der Fall $\nabla W \parallel d\underline{r}'$

$\Longleftrightarrow \quad \underline{p} = \nabla W \parallel d\underline{r}' \quad . \quad \underline{p} = m\dot{\underline{r}}$

mit $\dot{\underline{r}}$ tangential an die Kurve.

Satz von Maupertuis: Unter allen Bahnen gleicher Energie E mit festem Anfangs-/Endpunkt nimmt die verkürzte Wirkung $W \equiv \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} |\nabla W||d\underline{r}| =$

$$= \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \sqrt{2m(E - V(\underline{r}'))}\,|d\underline{r}'|$$

für die tatsächliche Bahn ($\underline{p} \parallel \dot{\underline{r}}$) ein Minimum an.

Explizit $\quad \delta \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \sqrt{2m[E - V(\underline{r})]}\,|d\underline{r}| = 0$

df Differential

Analog hat man in der (geometrischen) Optik das Prinzip von Fermat

$$\delta \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underbrace{n(\underline{r})}_{\text{optische Brechungsindex}} |d\underline{r}| = 0$$

Wirkungs- und Winkelvariablen

Periodische Bewegungen in $d=1$, $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

$$H = E, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -V'(q)$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V(q) \Longrightarrow \dot{q} = \frac{dq}{dt}$$

$$t - t_0 = \int_{q_0}^{q} \frac{dq'}{\sqrt{2(E - V(q'))/m}} \rightarrow q = q(t)$$

Alternativ: Ham.-Jacobi: $p = \frac{\partial W}{\partial q}$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + V(q) = E \equiv \underline{P}$$

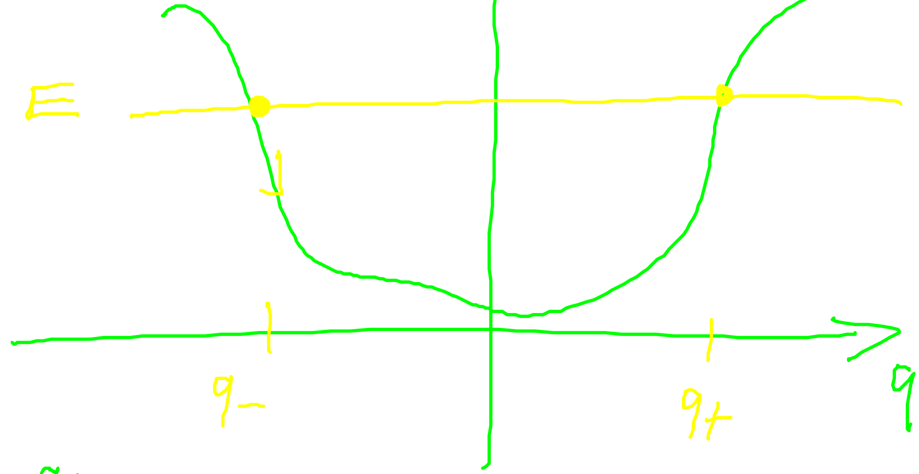
$$W(q,P) = \int_{q_0}^{q} \sqrt{2m(E - V(q'))}\, dq'.$$

$$Q(q,P) = \frac{\partial W}{\partial \underline{P}} = \int_{q_0}^{q} \frac{dq'}{\sqrt{2[\underline{P} - V(q')]/m}}$$

neue „Impulsvariable" $P = E$ = Energie

neue „Ortskoordinate" $Q = t - t_0$

Wir wollen die Frequenz berechnen



$$\tau = \tau(E) = 2\int_{q_-}^{q_+} \frac{dq'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(q'))}}$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial E}\int_{q_-}^{q_+} dq' \underbrace{\sqrt{2m(E-V(q'))}}_{\text{Impuls } \pm p(E)}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(q) \Rightarrow p(q,E) = \pm\sqrt{2m(E-V(q))}$$

Wir können das Integral auch schreiben als

$$\tau = \tau(E) = \frac{\partial}{\partial E}\underbrace{\oint p(q,E)\,dq}_{\text{Wirkungsintegral}}.$$

Lässt sich konkret ausrechnen, z.B.

- $V(q) = \frac{1}{2}kq^2$.
- $V(q) = \frac{1}{2}kq^2 + \alpha q^4$, $\alpha > 0$.

Unterscheidung (Klassifikation) periodische Bewegungen

- Libration: Ortskoordinate, z.B. der Winkel, beschränkt
- Rotation: Ortskoordinate ist unbeschränkt