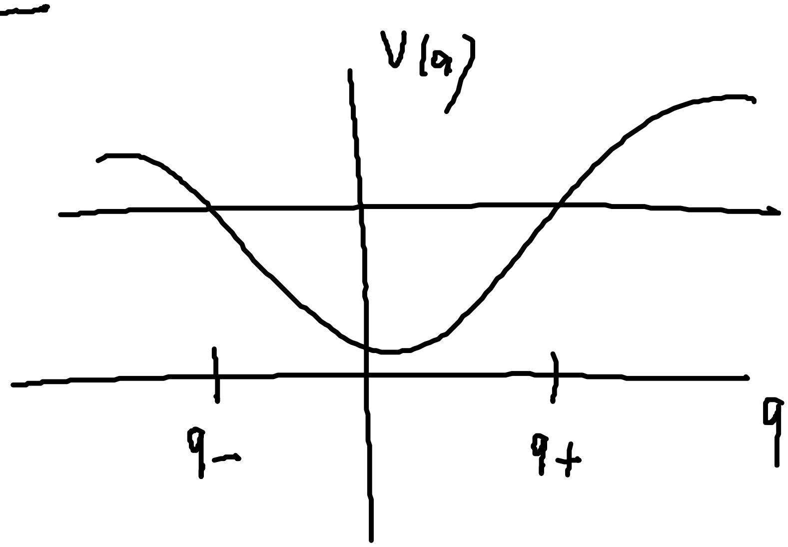
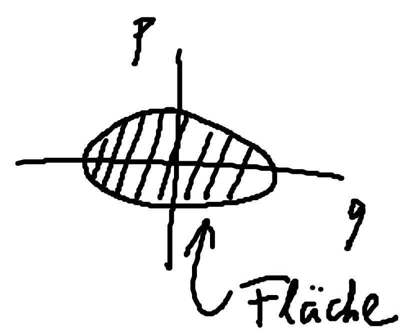
2.12.08

2.12.08





Periodendauer $\tau(E)$

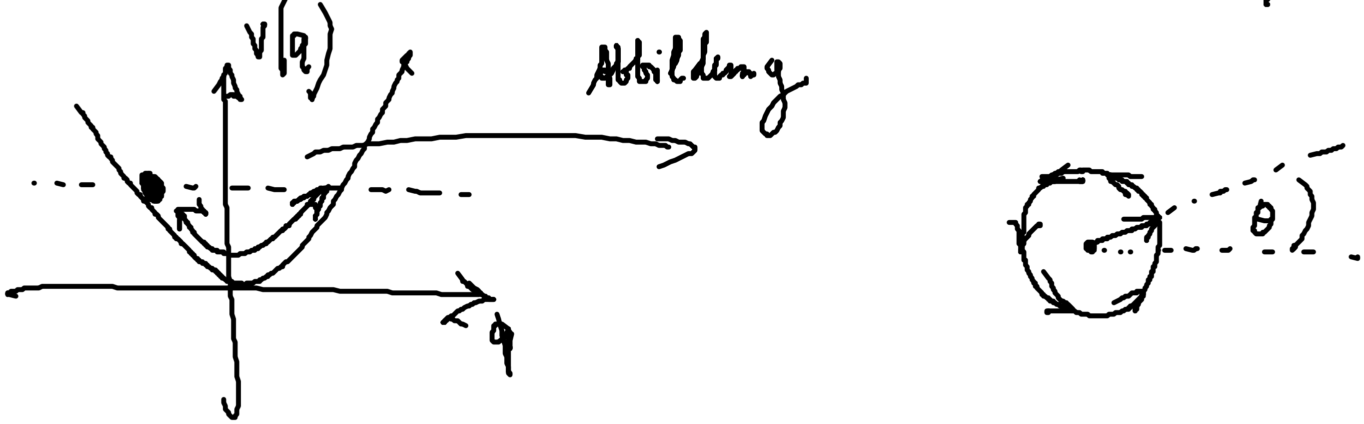
$$\tau(E) = \frac{\partial}{\partial E} \oint p(q, E)\, dq$$

Fläche : Wirkungsintegral

$$J(E) \equiv \frac{1}{2\pi} \oint p(q,E)\,dq \qquad \text{Wirkungsvariable}$$

Beispiel: 1d harm. Oszillator: Trajektorie im Phasenraum $\hat{=}$ Ellipsen

Idee: Einführung von „abstrakten" Winkelkoordinaten θ oder φ.



<u>1. Schritt</u> Neue Koordinaten durch kanonische Trafo

$$q, p;\ \mathcal{H}(q,p) = E \longrightarrow Q, P, K(P)$$

so dass $$P \equiv J \equiv \frac{1}{2\pi} \oint p(q,E)\,dq$$ Wirkungsvariable

Frage: Was ist das entsprechende neue Q.

Es muss gelten $\{P, Q\} = 1$ für kan. Trafos

(Die Poissonklammern bleiben bei kanonischen Trafos invariant).

Das neue Q ergibt sich aus

$$Q = \frac{\partial W(q, J)}{\partial J} = \varphi,$$

Q wird als Winkelvariable bezeichnet.

$$1 = \{P, Q\} = \{J, \varphi\},$$

d.h. Wirkungsvariable und Winkelvariable sind kanonisch konjugiert.

┌ kan. konjugierte Variablenpaare

1) p Impuls $\quad q$ Ort

$\dim p \cdot q = kg \frac{m^2}{s} = J \cdot s$

$= \dim$ (Wirkung)

2) E Energie $\quad t$ Zeit

$\dim E \cdot t = J \cdot s$

3) J Wirkungsvariable φ Winkel

dim $J\cdot\varphi$ = J·s. dim φ = J·S

Zurück zu $\varphi = \dfrac{\partial W(q,J)}{\partial J}$ W verkürzte Wirkung

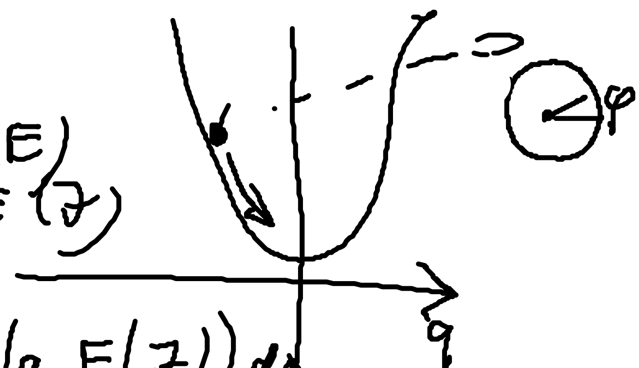
W erfüllt die verkürzte Hamilton-Jac. Gleichung

$$\mathcal{H}\Big(q, \underbrace{\frac{\partial W}{\partial q}}_{p}\Big) = E \qquad *$$

Berechne Änderung $\Delta\varphi$ von φ beim Durchlaufen eines kompletten Zyklus der periodischen Bewegung, d.h. von $q_- \to q_+ \to q_-$

$$\Delta\varphi = \oint \frac{\partial\varphi}{\partial q}\, dq =$$

$J = J(E)$ $\Rightarrow$ $E = E(J)$



$$= \oint \frac{\partial\, \partial W}{\partial q\, \partial J}\, dq =$$

$$= \frac{\partial}{\partial J} \oint \frac{\partial W}{\partial q}\, dq = \frac{\partial}{\partial J} \underbrace{\oint p(q, E(J))\, dq}$$

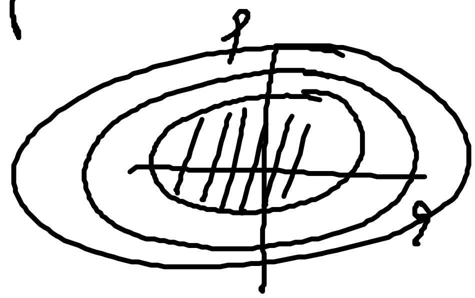
$$= \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}} 2\pi \mathcal{J} = 2\pi \qquad 2\pi \mathcal{J}$$

<u>Bewegungsgleichung</u>:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial K(\mathcal{J})}{\partial \mathcal{J}} = \frac{\partial E(\mathcal{J})}{\partial \mathcal{J}}$$

$$\dot{\mathcal{J}} = -\frac{\partial K(\mathcal{J})}{\partial \varphi} = 0$$

$\mathcal{J} = \text{const}$



$$\varphi(t) = \underbrace{\frac{\partial E(\mathcal{J})}{\partial \mathcal{J}}}_{\omega(\mathcal{J}) \equiv \frac{2\pi}{\tau}} \cdot t + \varphi_0$$

$$\omega^{-1} = \frac{\partial \mathcal{J}(E)}{\partial E} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial E} \oint p(q,E)\, dq .$$

wie vorher

Winkel- und Wirkungsvariablen bei $f \geq 1$ Freiheitsgraden

Beispiele: Überlagerte Schwingungen.

Betrachte separable Systeme mit Wirkungsfunktion

$$S = \sum_{i=1}^{f} W_i(q_i, \underline{P}) - Et$$

$\underline{P} = P_1, \dots, P_f$ Konstante der Bewegung

$P_1 = E$

Definiere $\mathcal{J}_i \equiv \frac{1}{2\pi} \oint p_i(q_i, \underline{P})\, dq_i ;\quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$

$i=1,\dots,f$

Wirkungen als neue Bewegungskonstanten..

Entsprechend kanonisch konjugierte Winkelvariablen θ_i

$$W = \sum_{k=1}^{f} W_k(q_k, P(\underline{J})) \Rightarrow \theta_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}, \quad i=1,\dots,f$$

neue Ham. Fkt $K = H = E(\underline{J})$

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial E}{\partial J_i}, \quad J_i = \text{const}$$

$$\rightarrow \quad \theta_i = \omega_i t + \theta_{i0}; \quad \omega_i = \frac{\partial E}{\partial J_i}$$

$\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3$

Alte Ortsvariablen q_i ausdrücken als

$$q_i = q_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_f; \underline{J})$$

sind periodisch, d.h. es gilt

$$* \quad q_i(\theta_1, \dots, \theta_f, J) = q_i(\theta_1 + 2\pi n_1, \dots, \theta_f + 2\pi n_f, J).$$

$n_i \in \mathbb{N}$

(Beweis in REBHAN).

$*$ kann in Fourier-Reihe entwickelt werden.

$$q_i(\underline{\theta}, \underline{J}) = \sum_{n_1,\dots,n_f=-\infty}^{\infty} a^{(i)}_{n_1 n_2 \dots n_f} e^{i(n_1\theta_1 + \dots + n_f\theta_f)}$$

$$q_i(t) = \sum_{n_1,\dots,n_f=-\infty}^{\infty} a^{(i)}_{n_1 \dots n_f} e^{i(n_1[\omega_1 t + \theta_{10}] + \dots + n_f[\omega_f t + \theta_{f0}])}$$

Das ist die Zeitentwicklung der alten Ortskoordinaten $q_i(t)$

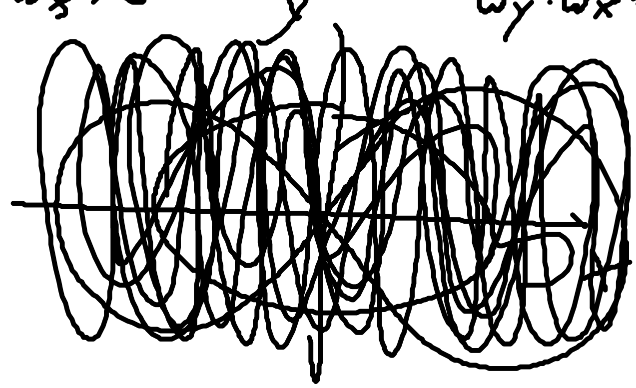
Satz: Falls die Winkelfrequenzen ω_i kommensurabel sind, d.h. zueinander paarweise in rationalen Zahlenverhältnissen stehen, so sind die $q_i(t)$ periodische Funktionen in der Zeit.

Beispiel:

$$y(t) = y_0 \sin \omega_y t$$
$$x(t) = x_0 \sin \omega_x t$$

$\omega_y : \omega_x = 2$

Lissajous-Figuren



$\omega_y = \omega_x = \pi$

Kepler-Problem und die „Alte Quantenmechanik“.

Zentralfeld in $d=3$, d.h. Potential

$$V(r).$$

Drehimpulserhaltung: Bewegung läuft in einer Ebene ab

Polarkoordinaten (r, φ) Ortskoordinaten

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r) .$$ Hamiltonfunktion

p_r, p_φ zu r, φ kanonisch konj. Impulse

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \left(\dot r^2 + r^2 \dot\varphi^2\right) - V(r)$$

Lagrange Fkt.

Hamilton-Jacobi für verkürzte Wirkung W

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi}; \qquad W = W(r, \varphi)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 = E - V(r)$$

$$W(r,\varphi) = R(r) + \Phi(\varphi)$$

Separations-Ansatz

$$\left[R'(r)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\left[\Phi'(\varphi)\right]^2 = 2m\left(E - V(r)\right)$$

$$L_0^2 = \left[\Phi'(\varphi)\right]^2 = r^2\left(2m\left(E - V(r)\right) - \left[R'(r)\right]^2\right)$$

$L_0 = \text{konst}$

$$\Longrightarrow \quad \phi'(\varphi) = L_0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = L_0 \varphi$$

$$R(r) = \pm \int_{r_0}^{r} \sqrt{2m\left(E - V(r')\right) - \frac{L_0^2}{r'^2}}\, dr'$$

$$W = \Phi + R$$

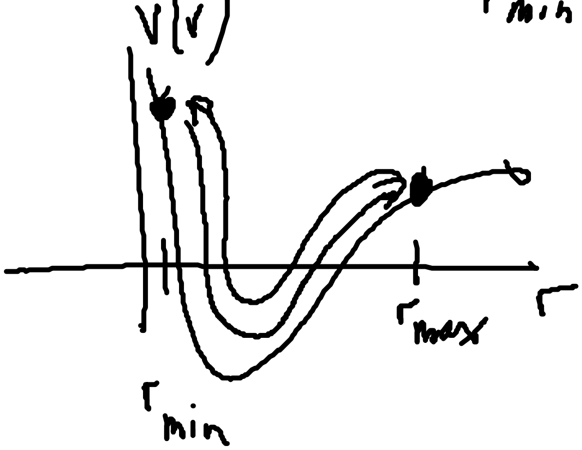
Wirkungsvariablen:

$$\underline{J_\varphi} = \frac{1}{2\pi} \oint p_\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial \varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} L_0 \cdot 2\pi = \underline{L_0}$$

$$\underline{J_r} = \frac{1}{2\pi} \oint p_r \, dr = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial r} dr = \frac{1}{2\pi} \oint R'(r) dr$$

$$= \underline{\frac{1}{2\pi} 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \sqrt{2m\left[E - V(r)\right] - \frac{L_0^2}{r^2}}}$$



Winkelvariablen, die zu $\mathcal{J}_\varphi$ und $\mathcal{J}_r$ gehören.

$$\Theta_r = \frac{\partial W}{\partial \mathcal{J}_r} = \frac{\partial R}{\partial \mathcal{J}_r} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}_r} \int_{r_0}^{r} \sqrt{2m\left(E - V(r')\right) - \frac{\mathcal{J}_\varphi^2}{r'^2}}\, dr'$$

$$\left[W = R + \Phi \right], \qquad \Phi = \mathcal{J}_\varphi \varphi$$

$$E = E(\mathcal{J}_r, \mathcal{J}_\varphi)$$

$$= \int_{r_0}^{r} dr' \frac{m \frac{\partial E}{\partial \mathcal{J}_r}}{\sqrt{2m\left(E - V(r')\right) - \frac{\mathcal{J}_\varphi^2}{r'^2}}} \qquad \frac{\partial E}{\partial \mathcal{J}_r} = \omega_r$$

$$= \omega_r \underbrace{\int_{r_0}^{r} dr' \frac{m}{\sqrt{2m\left(E - V(r')\right) - \frac{\mathcal{J}_\varphi^2}{r'^2}}}}_{(t - t_0)}$$

d.h.
$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} dr' \frac{m}{\sqrt{2m\left(E - V(r')\right) - \frac{\mathcal{J}_\varphi^2}{r'^2}}}$$

Das hatten wir bereits aus dem Energiesatz erhalten

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r)\right) - \frac{L_0^2}{m^2 r^2}}$$

für den Fahrstrahl

Winkelvariables $\theta_\varphi = \frac{\partial W}{\partial J_\varphi} =$

$\Phi = J_\varphi \cdot \varphi$

$$= \frac{\partial}{\partial J_\varphi}\left(\Phi(\varphi) + R(r)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial J_\varphi}\left(J_\varphi \varphi + \int_{r_0}^{r} dr' \sqrt{2m\left[E - V(r')\right] - \frac{J_\varphi^2}{r'^2}}\right)$$

$$E = E(J_\varphi, J_r)$$

$$= \varphi + \int_{r_0}^{r} dr' \, \frac{m \frac{\partial E}{\partial J_\varphi} - \frac{J_\varphi}{r'^2}}{\sqrt{2m\left(E - V(r')\right) - \frac{J_\varphi^2}{r'^2}}} =$$

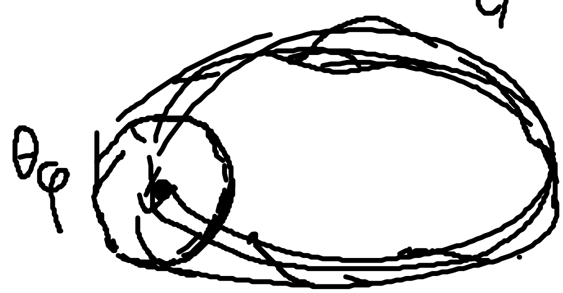
$$= \cancel{\varphi} + \omega_\varphi \int_{r_0}^{r} \frac{m}{\sqrt{\quad}} \, dr' - \cancel{\varphi},$$

denn $\varphi = \int_{r_0}^{r} \frac{L_0/r'^2}{\sqrt{\quad}} \, dr'$

(siehe Kapitel 1).

$$\left.\begin{aligned} \theta_\varphi(t) &= \omega_\varphi(t-t_0) \\ \theta_r(t) &= \omega_r(t-t_0) \end{aligned}\right\}$$ zwei Winkel-variablen

$\omega_\varphi, \omega_r =$ konst



Kreis S_φ