3.12.08

3.12.08

„Ältere QM"

Sommerfeld-Wilson-Quantisierungsregeln

Wirkungsvariablen

$$J_\varphi = L_0 \quad \text{Drehimpuls}$$

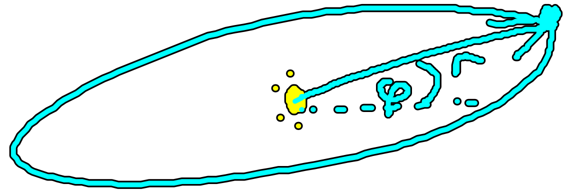
$$J_r = \frac{1}{2\pi} 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}$$

Winkelvariablen

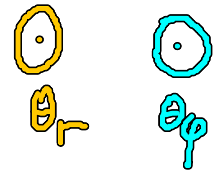
φ, r

Kepler: $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ Coulomb

Damit wird $\quad J_r = -\underbrace{L_0}_{J_\varphi} + \alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}$



$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\left(J_r + J_\varphi\right)^2}$$



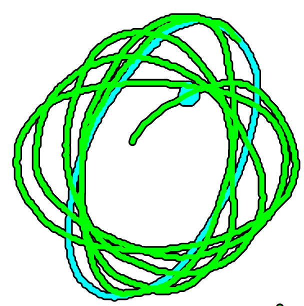
Die Winkelfrequenzen ω_r, ω_φ aus

$$\omega_\varphi = \frac{\partial E}{\partial J_\varphi} = \frac{m\alpha^2}{\left(J_r + J_\varphi\right)^3} \Rightarrow \theta_\varphi(t) = \omega_\varphi(t - t_0)$$

$$\omega_r = \frac{\partial E}{\partial J_r} = \frac{m\alpha^2}{\left(J_r + J_\varphi\right)^3} \Rightarrow \theta_r(t) = \omega_r(t - t_0)$$

Die beiden Winkelfrequenzen sind gleich.
Einen solchen Fall bezeichnet man als „entartet".

Konsequenz: geschlossene Bahnen



$\frac{1}{r}$

$+\frac{1}{r^3}$

Alternativ: von Anfang an in
<u>3d</u> Polarkoordinaten (statt 2d),

d.h.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}\right\} 3d$$

$$\left(\quad \left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} 2d \quad\right)$$

Man erhält 3 Winkel- und 3 Wirkungsvariablen

$$\theta_r, \theta_\varphi, \theta_\vartheta \quad ; \quad J_r, J_\varphi, J_\vartheta$$

Rechnung: GOLDSTEIN

$$\Rightarrow \quad E = -\frac{m\alpha^2}{2(J_r + J_\varphi + J_\vartheta)^2} .$$

m : reduzierte Masse.

Sommerfeld-Wilson-Quantisierung in der sog. „Älteren Quantenmechanik", d.h. vor 1926.

Grundregel der Quantisierung:

h Planck'sches Wirkungsquantum

$$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \ J \cdot s$$

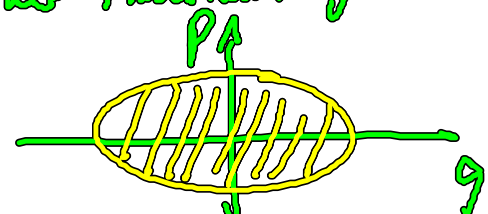
$E \cdot t$

$J_\varphi \cdot \varphi$

$p \cdot q$

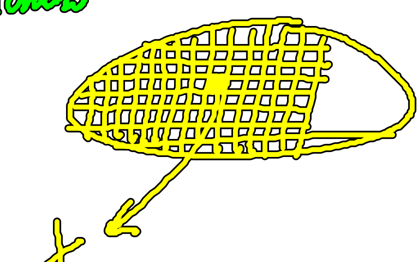
$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i \, dq_i = n_i \frac{h}{2\pi} = n_i \hbar , \quad \hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$$

Wirkungsvariable $\hat{=}$ die Fläche, die von der Phasenraumtrajektorie eingeschlossen wird



$n_i \in \mathbb{N}$

Die Wirkungsvariablen sind in Vielfachen von $\hbar$ quantisiert.



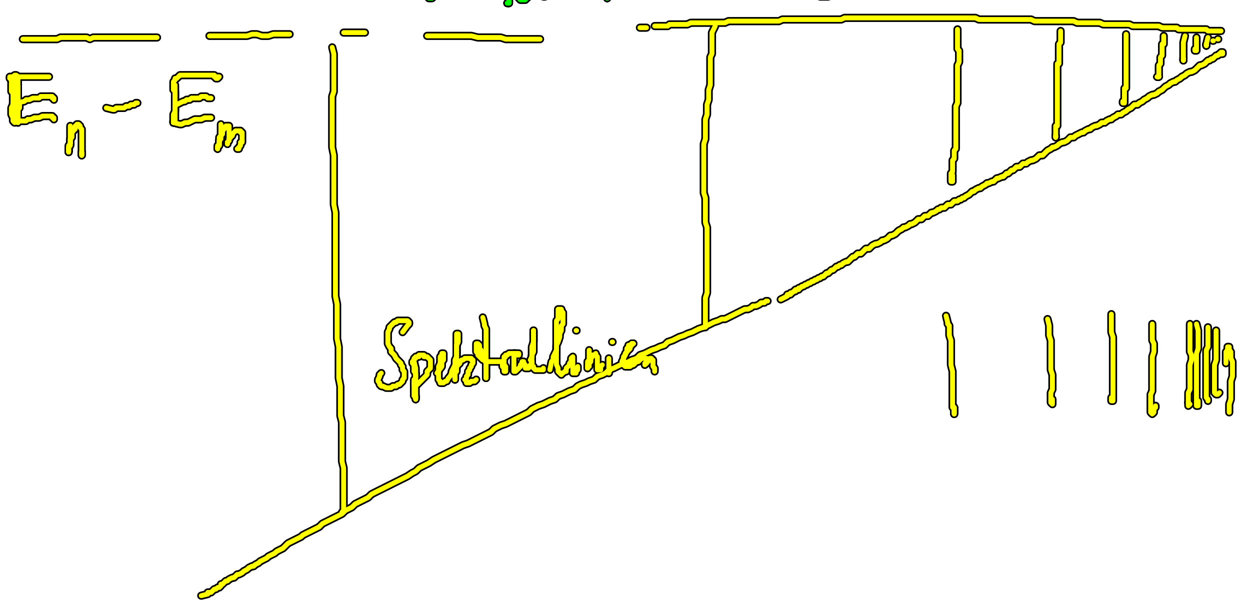
Im Beispiel des Kepler-Problems:

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(\partial_r+\partial_\varphi+\partial_\theta)^2} = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}\frac{1}{(n_r+n_\varphi+n_\theta)^2}$$

$$n \equiv n_r + n_\varphi + n_\theta$$ „Hauptquantenzahl"

$$\Longrightarrow \quad \boxed{E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}}$$ mögliche Energie-Werte

→ Balmer-Serie



In der „neuen QM" (Schrödingergleichung)

kann dann ein Zusammenhang zwischen

n_r, n_φ, n_θ und den

„richtigen" Quantenzahlen n, l Drehimpuls
m " L_z-Komponente.

Integrabilität

geschickte KO-Wahl $\Rightarrow$ Hamilton-Jacobi kann durch Separation gelöst werden.

Beispiel Kepler

$$W(r,\varphi) = R(r) + \Phi(\varphi),$$

$$R(r) = \pm \int_{r_0}^{r} dr' \sqrt{\quad}$$ wird bezeichnet als „Quadratur",

d.h. einfache Integrationen.

Man sagt, das Kepler-Problem ist separierbar und damit vollständig integrierbar.

Separationskonstanten: z.B. E Energie in $S = W - E \cdot t$ für konserv. Probleme oder L_0.

Wenn die Ham.-Jac. Gleichung eines Systems mit f Freiheitsgraden separiert, dann hat man f Separationskonstanten, d.h. die „neuen Impulse"

P_i, $i = 1, \dots, f$. Üblicherweise $P_1 \equiv E$.

Die P_i sind Funktionen der alten Orte + Impulse, d.h.

$$P_i = P_i(q, p).$$

Weiterhin gilt

$$\{P_i(q,p), P_j(q,p)\}_{q,p} = \{P_i, P_j\}_{P,Q} = 0.$$

Die P_i liegen „paarweise in Involution".

Beispiele: 1) Schwerer symmetr. Kreisel.

Ortsvariablen: Euler-Winkel θ, ψ, φ

Erhaltungsgrößen:

$$P_1 = E$$
$$P_2 = L_z = p_\varphi$$
$$P_3 = L_{z'} = p_\psi$$

hier $f = 3$ Freiheitsgrade

$f = 3$ Erhaltungsgrößen

2) N-Körperproblem, Zentralkräfte (actio = reactio) in $d = 3$.

Insgesamt 10 Erhaltungsgrößen

$$E, \underline{P}_S, \underline{L}, \underline{r}_S(t=0).$$

$N=2$: Zweikörperproblem, $f = 2\cdot d = 6$ Freiheitsgrade.

6 Erhaltungsgrößen, die in Involution liegen.

$$E_{rel} = \frac{p^2}{2\mu} + U(r)\,;\ P_S\,;\ L^2;\ L_z$$

$N=3$: Dreikörperproblem, $f = 3d = 9$ Freiheitsgrade

Satz (Theorem von Liouville).

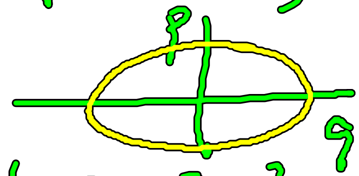
Kennt man in einem konservativen System mit f Freiheitsgraden f unabhängige Bewegungsintegrale

$$F_i(q,p) = \alpha_i\,; \quad i = 1, \dots, f,$$

die miteinander paarweise in Involution liegen, d.h. $\{F_i, F_j\} = 0$ und deren Phasenraumgradienten keine Nullstellen haben, so kann man das System durch Quadraturen lösen.

unabh. Bewg. integrale : $\quad dF_1, \dots, dF_f$ sind linear unabhängig.

Ergänzung: $2f$-dim. Phasenraum, (zB $f=1$)



f Gleichungen $F_i(q,p)=\alpha_i$

definieren eine Hyperfläche T^f (z.B. $p^2+q^2=E$)

$\Longrightarrow$ abbildbar auf f-dimensionalen TORUS

$$T^f = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{f \text{ Faktoren}}$$

$f=2$: $T^2 = S^1 \times S^1$

ω_1 θ_1