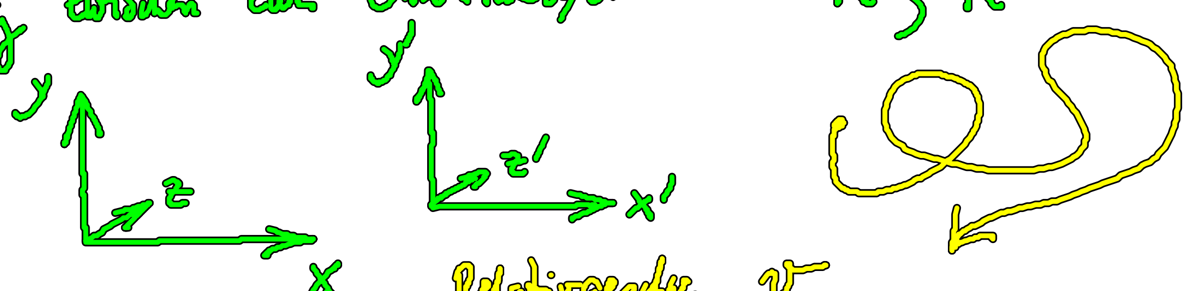
10.12.2008

10.12.2008

Newtonsche Mechanik : „mechanisches Relativitätsprinzip"

Alle Inertialsysteme sind zur Beschreibung mechanischer Vorgänge gleich gut geeignet.

Übergang zwischen zwei Inertialsystemen K, K'



Relativgeschw. v

Galilei-Transformation

(spezielle)

$$x' = x + vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$ (Zeit ist dieselbe)

$$\underline{x}' = R\underline{x} + \underline{v}t + \underline{a}$$
$$t' = t + t_0 \,, \quad t_0 \in \mathbb{R} \,;$$

R Drehmatrix

$\underline{v}, \underline{a} \in \mathbb{R}^3$

Galilei-Trafo hat 10 Parameter

$\underline{v}$: Geschwindigkeit

$\underline{a}$: Verschiebungsvektor

R: konstante Matrix $\in SO(3)$

Invarianz der Newtonschen Gleichungen

$$m_i \ddot{\underline{x}}_i = \underline{F}_i\left(\{|\underline{x}_i - \underline{x}_j|\}\right) \quad \text{in System } K$$
$$\downarrow$$
$$m_i' \ddot{\underline{x}}_i' = \underline{F}_i'\left(\{\underbrace{|\underline{x}_i' - \underline{x}_j'|}\}\right) \quad \text{in System } K'$$

Kräfte $\underline{F}_i' = R\underline{F}_i$ werden rotiert

Massen $m_i = m_i'$

Die Newtonschen Gleichungen sind forminvariant unter Galileitransformation.

- Entsprechend gibt es die Erhaltungsgrößen (10).

(Alternativ: Lagrangefunktion hat Symmetrie, d.h. Invarianz unter Galilei-Trafos

$\underset{\text{Noether}}{\Longrightarrow}$ 10 Erhaltungsgrößen).

Gruppen:

Definition: Eine Menge G mit einer assoziativen Operation $*: G \times G \to G$,

$$(a,b) \to a*b \in G$$

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

heißt Gruppe, falls es ein neutrales Element e gibt und zu jedem $g \in G$ ein inverses Element $g^{-1} \in G$ mit $g*g^{-1} = g^{-1}*g = e$ existiert.

Beispiele: 1) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bezüglich Multiplikation $*$

2) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bezüglich der Operation $+$ (Addition)

3) Komplexe $n \times n$ Matrizen A mit $\det A \neq 0$
bezüglich Matrix-Multiplikation.

Hier $e = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ Einheitsmatrix

<u>Definition</u>: Eine Gruppe heißt <u>abelsch</u>, falls $*$ <u>kommutativ</u> ist, d.h. $a * b = b * a$.

$\lambda \mathbb{1}$

$x \mathbb{1}$.

<u>Lorentz-Transformation</u>

Wellengleichung vom Typ

$$\Delta u(\underline{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\underline{x}, t) = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ „Laplace-Operator".

Wellengleichung nicht forminvariant unter Galilei-Trafo

$\Longrightarrow$ 1. Mögl.: Postulat des „Äthers".
funktioniert nicht (Michelson-Expo).

Wir suchen die Gruppe von Transformationen, die die Wellengleichung und deshalb den d'Alembert-Operator

$$\boxed{\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square}$$

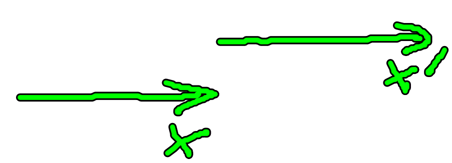
$$\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}, \quad x^0 \equiv ct .$$

Einsteinsches Relativitätsprinzip

- Sämtliche physikalische Vorgänge laufen in allen IS gleich ab.
- Die Vakuumlichtgeschwindigkeit c ist unabhängig vom Inertialsystem

Konstruktion

Zwei Inertialsysteme K, K'



Raumzeitlicher Vorgang entlang der x, x'-Achsen.

Freies Teilchen, geradlinige Bewegung

$$x = \alpha t + \delta \quad \text{in } K$$

$$x' = \alpha' t' + \delta' \quad \text{in } K'$$

Transformation $(x,t) \to (x',t')$ so, dass Geraden in Geraden übergehen.

Für die Koordinaten $\begin{matrix} x \to x' \\ t \to t' \end{matrix}$ soll die Trafo

<u>linear</u> sein

$$x' = \gamma_v (x - vt) \qquad \| \quad 1)$$

läßt $x' = 0$ für $x = vt$ fest.

(KO-Ursprung $x' = 0$ bewegt sich gleichförmig in K).

Bei $t = 0$: $x = x' = 0$.

Trafo von $K' \to K$ muß die Form

$$x = \gamma_{-v} (x' + vt'). \qquad \| \quad 2)$$

Isotropie des Raumes: Ersetze $\begin{matrix} x' \to -x' \\ x \to -x \end{matrix}$

(gespiegelte Welte) $\qquad v \to -v$

1) $\Longrightarrow \quad -x' = \gamma_{-v}(-x + vt)$

$$x' = \gamma_{-v}(x - vt)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\gamma_v = \gamma_{-v}}$$

Trafo für t: Einsetzen von 1) in 2)

$$x = \gamma_v(x' + vt') = \gamma_v\left(\gamma_v(x - vt) + vt'\right)$$

$$\Longrightarrow \quad t' = \gamma t + \frac{1-\gamma^2}{v\gamma}x \quad ; \quad \gamma \equiv \gamma_v \, .$$

Zusammenfassend

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma t + \frac{1-\gamma^2}{v\gamma}x \end{aligned}} \qquad (*)$$

Hintereinanderschalten von Trafos

$$\begin{tikzcd} & K'' \\ K \arrow[ur] \arrow[r] & K' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

muß auch die Form (*) haben

Bestimmung von $\gamma(v)$: Gruppeneigenschaft

Zwei Trafos hintereinander

$$t'' = \gamma' t' + \frac{1-\gamma'^2}{v'\gamma'} x' \qquad \gamma' = \gamma(v')$$

$$= \gamma'\left[\gamma t + \frac{1-\gamma^2}{v\gamma} x\right] + \frac{1-\gamma'^2}{v'\gamma'} \gamma (x - vt)$$

$$x'' = \gamma'(x' - v't') = \gamma'\left(\gamma(x-vt) - v'\left(\gamma t + \frac{1-\gamma^2}{v\gamma} x\right)\right)$$

Das muß wieder die Form (*) haben, d.h.

a) $t'' = \gamma'' t + \frac{1-(\gamma'')^2}{v''\gamma''} x$

b) $x'' = \gamma''(x - v''t)$

γ'' für $K \to K''$

γ für $K \to K'$

γ''' für $K \to K'''$

γ' für $K' \to K''$

Vergleich: für den Vorfaktor γ''

$$\left.\begin{aligned} &a)\ \gamma'' = \frac{1-\gamma'^2}{v'\gamma'} \gamma \cdot (-v) \\ &b)\ \gamma'' = \frac{1-\gamma^2}{v\gamma} \gamma' \cdot (-v') \end{aligned}\right\} \underbrace{\frac{1-\gamma^2}{v^2\gamma^2}}_{\text{abh. von } v} = \underbrace{\frac{1-\gamma'^2}{(v'\gamma')^2}}_{\text{abh. von } v'} = K = \text{const}$$

$$\Rightarrow \quad 1-\gamma^2 = v^2\gamma^2 K$$

$$1 = (1 + v^2 K)\gamma^2$$

$$\gamma \equiv \gamma(v) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+v^2K}}$$

$\gamma(v=0) = 1$) neg. Lösung verwerfen.

$x' = \gamma(v)(x - vt)$

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma(v) &= \frac{1}{\sqrt{1+Kv^2}} \\ x' &= \gamma(v)\cdot(x - vt) \\ t' &= \gamma(v)\cdot t + \frac{1-\gamma^2(v)}{v\,\gamma(v)}\,x \end{aligned}}$$

$K=0 \Rightarrow \gamma = 1 \Rightarrow \quad x' = x - vt$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad t' = t$

(Galilei)

$K \neq 0$: verallg. Trafos

Jetzt ED-Phänomen zu Bestimmung von K :

$c = c'$.

Aussenden einer Lichtwelle mit Wellenfront

$x = ct$ in K

$x' = ct'$ in K' mit $c' = c$

Einsetzen:

$$ct' = \gamma(ct - vt)$$
$$ct = \gamma(ct' + vt')$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$\Downarrow$$

$$c^2 tt' = \gamma^2 tt'(c - v)(v + c)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$c^2 = \gamma^2(c^2 - v^2);$$

$$\left\| \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\|$$

Damit

Lorentz-Transformation

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}}$$