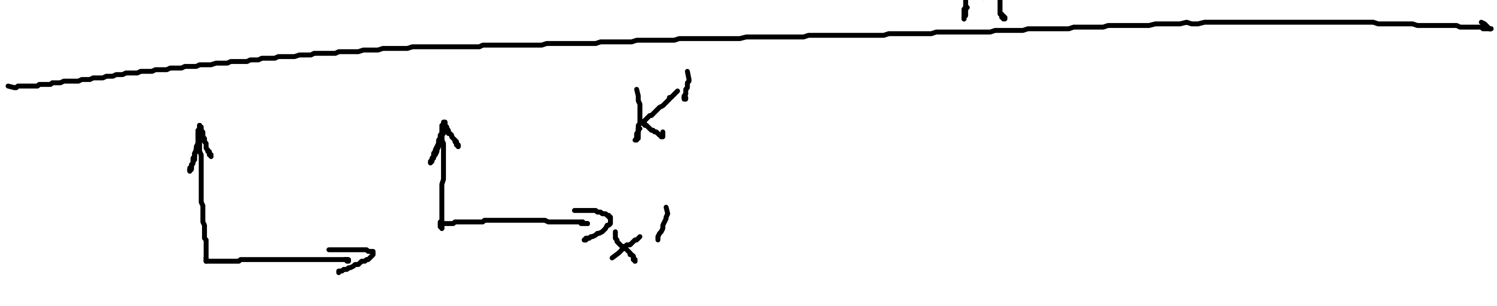
16.12.08

Diesen Donnerstag 18.12.08
Physikalisches Kolloquium HS 202/1
Prof. Frey (LMU München) 17^{00} h

Do., 18.12.08
Physikal. Kolloquium:
Prof Frey (LMU München) HS 201/2
17^{00}



$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} ; \quad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Explizit

$$x' = \gamma (x - vt)$$
$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x\right)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Mit 4x4-Matrizen:

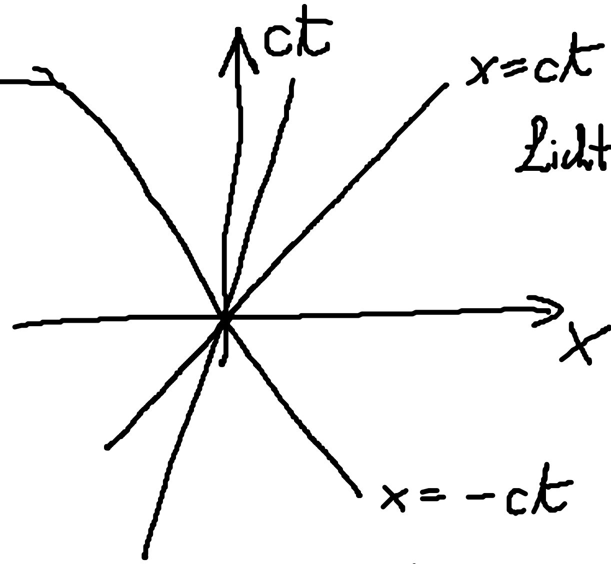
$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Vierervektor $(x^\alpha) = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T$

$x^0 \equiv ct$; $x^1 = x$; $x^2 = y$; $x^3 = z$

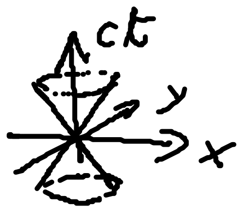
(kontravariante Komponenten).

Minkowski-Diagramme



$$x^2+y^2+z^2 = c^2t^2$$

$$|\underline{r}| = ct$$ definiert den „Lichtkegel"



Geraden vom Typ $x = vt + x_0$

$$ct = \frac{c}{v}x + c\,t_0$$

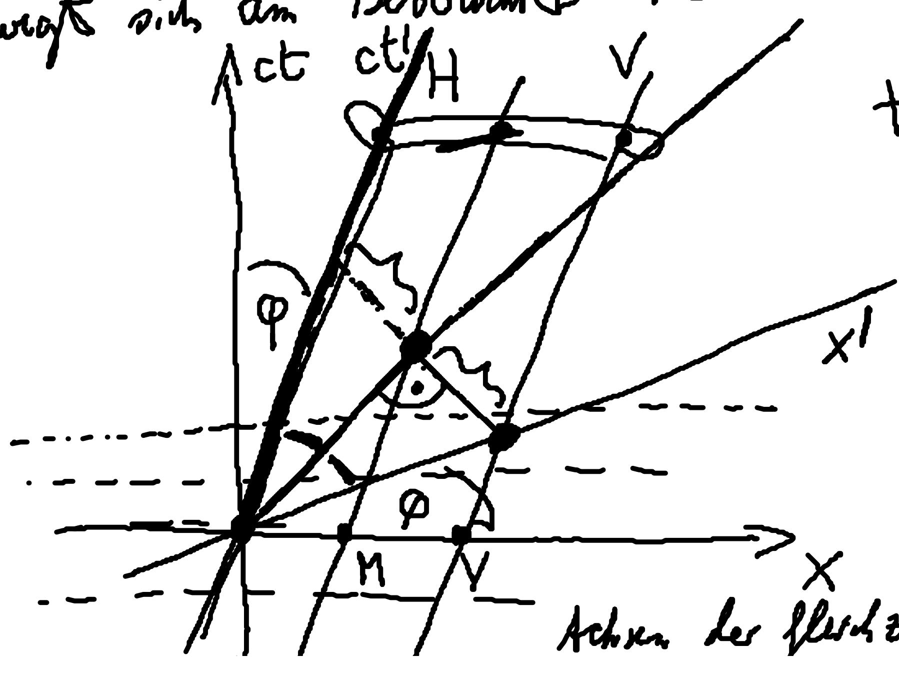
bezeichnet man als „Weltlinien".

Relativität der Gleichzeitigkeit

„Symmetrisches Flugzeug" K'

3 Punkte H M V (hinten, Mitte, vorne)

bewegt sich am Beobachter K mit Geschw. v vorbei.



$$\tan\varphi = \frac{v}{c}$$

Achse der Gleichzeitigkeit für Beobachter in K'

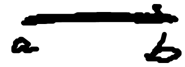
Achsen der Gleichzeitigkeit

für K_0'

1) Längenkontraktion

Im System K' ruhe ein Maßstab der Länge

$$l_0 \equiv \Delta x' \equiv x'_a - x'_b$$



Ein Beobachter in K messe Stabspitze b und Stabende a gleichzeitig, d.h. bestimmt

$$\Delta x \text{ für } \Delta t = 0 .$$

Aus der Lorentz-Trafo folgt

$$l_0 \equiv \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$
$$= \gamma \Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{l_0}{\gamma} = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < l_0$$ Längenkontraktion.

Trafo in der anderen Richtung:

$$x' = \gamma(x - vt); \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$
$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t); \quad \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$

oder entsprechend von $K' \to K$

$$x = \gamma(x' + vt') \; ; \; t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

$$\underbrace{\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')} \; ; \; \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right)$$

Beobachter in K (naiv): Benutze $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$

mit $\Delta t' = 0 \Rightarrow \Delta x = \gamma \underbrace{\Delta x'}_{l_0} = \gamma \cdot l_0$

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, l_0 > l_0$$

Aber: hier ist die Zeitdifferenz Δt in K von Null verschieden

nicht gleichzeitig in K'

$$\Delta t = \gamma\left(\underbrace{\Delta t'}_{0} + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) = \gamma \frac{v}{c^2} l_0 \neq 0$$

Richtig: $0 = \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) \Rightarrow \boxed{\Delta t' = -\frac{v}{c^2}\Delta x'}$

gleichz. bei „mir“ $\Rightarrow$ $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') = \gamma\left(\Delta x' + v\left(-\frac{v}{c^2}\Delta x'\right)\right)$

$$= \gamma\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\Delta x' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\;\Delta x'$$

M.R. Spiegel „Mechanik“ (Aufgabensammlung)

Reihe SCHAUM

2) Zeitdilatation

„Bewegte Uhren gehen langsamer"

Im System K' ruhe bei $x' = 0$ eine Uhr. Ein Beobachter in K' messe das periodische „Schlagen" der Uhr, d.h. Ereignisse mit Zeitintervall $\Delta t'$.

Dann findet ein Beobachter in K für das Zeitintervall Δt in seinem Bezugssystem

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\underbrace{\Delta x'}_{0}\right) = \gamma \Delta t'$$

$$\Delta t \geq \Delta t' .$$

z.B. $\Delta t' = 1s$; ; $\Delta x = \gamma(\underbrace{\Delta x'}_{0} + v\Delta t')$

$$= v \cdot \gamma \Delta t' = \underline{v \Delta t}$$

Experimentell: • Lebensdauer von Elementarteilchen π^0-Mesonen, $\mu^\pm$ Mesonen

• Hafele, Keating 1972

Präzisionsuhren mit Flugzeugen um die Erde.

(Lit: GOENNER).

Minkowski-Raum.

Der Raum der Vierervektoren $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$

x^0: ct

[manchmal in älterer Literatur

(x^1, x^2, x^3, x^4)

(x^1, x^2, x^3, ict)]

bzgl. eines Inertialsystems K.

Transformation der Komponenten zwischen K und K'

gemäß LT (Lorentz-Trafos)

$$x' = \Lambda x + b$$

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\delta \, x^\delta + b^\alpha$$

(Einsteinsche Summationskonvention)

Summieren

$$\Lambda(v) = \left(\Lambda^\alpha{}_\delta\right) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

für $\underline{v} = v\,\underline{e}_1$.

$b = 0$: homogene LT ; $\underline{b \neq 0}$ inhomogene LT

LT haben die Gruppeneigenschaft.

- die inhomog. LTs bilden die Poincaré-Gruppe
- die homog. LTs " Lorentzgruppe.

Definiere den vierdimensionalen Abstand zweier Vektoren x^α, y^α mit $z^\alpha = x^\alpha - y^\alpha$

$$z^2 \equiv (z^0)^2 - (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2$$

Es gilt $z^2 = 0$ für „lichtartige Abstände", z.B. Aussenden eines Lichtstrahls bei x, Empfang bei y.

Damit $$(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Schreibe diese quadratische Form als

$$z^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} z^\alpha g_{\alpha\beta} z^\beta \equiv z^\alpha g_{\alpha\beta} z^\beta$$

$$g = (g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die LTs lassen den vierdimensionalen Abstand invariants:

$$(z')^2 = (z'^0, z'^1, z'^2, z'^3) \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z'^0 \\ z'^1 \\ z'^2 \\ z'^3 \end{pmatrix}$$

in K'

$$= (z^0, z^1, z^2, z^3) \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma^2-\gamma^2\beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^2+\gamma^2\beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{z^2}$$

Die homogenen LTs erfüllen

$$\Lambda^T g \Lambda = g \Leftrightarrow z^2 = (z')^2$$

$$z'^2 = (z')^T g\, z' = \underbrace{(z')^T \Lambda^T}_{z^T} g \underbrace{\Lambda\, z'}_{z} =$$

$$= z^T g\, z =$$

$$= z^2 .$$

Morgen weiter VL.