7.1.09

Aufgabe 36, Gl. (2)

$$G(t) = \theta(t)\, e^{-\frac{t}{2\tau}} \frac{1}{\omega'} (\sin \omega' t)$$

7.1.09

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega^2 x = f(t)$$

$$\underline{y}'(t) = A\, y(t) + b(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -1/\tau \end{pmatrix}$$

Systeme von DGL: $\underline{y}'(t) = \underline{\underline{A}}(t)\, y(t)$

$n \times n$ - Matrix

Lösen als AWP (Anfangswertproblem) mit AB (Anfangsbed.)

$$\underline{y}(t_0) = \begin{array}{ccc} \underline{e}_1 & \mapsto & \underline{y}_1(t) \\ \underline{e}_2 & \mapsto & \underline{y}_2(t) \\ \vdots & & \\ \underline{e}_n & \mapsto & \underline{y}_n(t) \end{array}$$

Spaltenvektoren $\underline{y}_i(t)$ definieren

$$\mathcal{U}(t, t_0) = \left(\underline{y}_1(t), \underline{y}_2(t), \dots, \underline{y}_n(t)\right),$$

Spaltenvektoren

so dass

$$\underline{y}(t) = \mathcal{U}(t, t_0)\, \underline{y}(t_0)$$

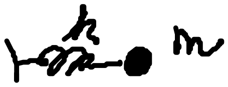
lineare Abbildung.

AB als Linearkomb. $\underline{y}(t_0) = c_1 \underline{e}_1 + \dots + c_n \underline{e}_n$

$$\Rightarrow \quad \underline{y}(t) = \mathcal{U}(t, t_0)\left[c_1 \underline{e}_1 + \dots + c_n \underline{e}_n\right]$$

$$= c_1 \underline{y}_1(t) + c_2 \underline{y}_2(t) + \dots + c_n \underline{y}_n(t)$$

wieder Lin.-Komb. der <u>Fundamentallösungen</u> $\underline{y}_i(t)$.

Zeitunabhängige Matrix A, 

mit konstanten Koeff. $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -1/\tau \end{pmatrix}$$

Homogener Fall (keine äußere Kraft)

$$\boxed{y'(t) = A\, y(t)}\ ; \qquad y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t)/m \end{pmatrix}$$

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}\, y(t_0),$$

denn $$y'(t) = A\, \underbrace{e^{A(t-t_0)}\, y(t_0)} = A\, y(t) \ \checkmark$$

außerdem $$y(t_0) = e^{A(t_0-t_0)}\, y(t_0)$$

Exponentialfkt. einer Matrix M

$$e^{M} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (M)^n .$$

Annahme: $n \times n$ Matrix A habe n linear unabh. Eigenvektoren mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; $A = C D C^{-1}$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^{C D C^{-1} t} =$$

$$= C\, e^{Dt}\, C^{-1}, \quad \text{denn}$$

$$e^{CDC^{-1}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(CDC^{-1}t \right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \underbrace{CD\cancel{C^{-1}}\cancel{C}D\cancel{C^{-1}}\cancel{C}D\cancel{C^{-1}} \cdots \cancel{C}DC^{-1}}_{CD^nC^{-1}}$$

$$= C \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D^n \right) C^{-1}$$

$$= C \; e^{Dt} \; C^{-1}$$

Außerdem mit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ folgt

$$e^{Dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{k\text{-mal}}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

also

$$\underline{y}(t) = C \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} C^{-1} \underline{y}(t=0)$$

C: Matrix der Eigenvektoren $\underline{x}_1$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ EW (Eigenwerte) von A.

$$C \equiv (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$$

$$AC = (A\underline{x}_1, \dots, A\underline{x}_n) = (\lambda_1 \underline{x}_1, \dots, \lambda_n \underline{x}_n)$$

$$= \underbrace{(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)}_{C} D \Rightarrow A = C D C^{-1} \;\; \|$$

$$\Leftrightarrow D = C^{-1} A C$$

Eigenschaften des Zeitentwicklungsoperators $\mathcal{U}(t, t_0)$

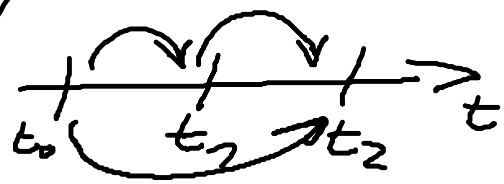
1) lineares System $\underline{y}'(t) = A(t)\underline{y}(t)$,

dann $\frac{d}{dt}\mathcal{U}(t, t_0) = A(t)\mathcal{U}(t, t_0)$;

$$U(t_0,t_0) = E$$

1a) $A(t) = A$ gilt $U(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}$

2) Für Zeiten t_0, t_1, t_2



$$U(t_2,t_0) = U(t_2,t_1)\,U(t_1,t_0)$$

z.B. $A(t) = A$; $e^{A(t_2-t_0)} = e^{A(t_2-t_1)}\, e^{A(t_1-t_0)}$

$$= e^{A(t_2 - \cancel{t_1} + \cancel{t_1} - t_0)}$$

$$= U(t_2,t_0)$$

Hintereinander-Schaltung.

3) Wronski-Determinante

$W(t,t_0) = \det U(t,t_0)$ erfüllt

die DGL

$$\frac{d}{dt} W(t,t_0) = \Big(\underbrace{\mathrm{Tr}\, A(t)}_{\text{Spur } A(t)}\Big) W(t,t_0) \quad ; \quad W(t_0,t_0) = \underline{1}$$

<u>Ohne Beweis</u>.

Anwendung: Ungedämpfter Oszillator ohne äußere Kraft.

$$y'(t) = A\,y(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

EW: $\det A - \lambda E = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = 0,$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm i\omega$$

Eigenvektoren von A: $\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}$ zu λ_1

$\underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix}$ zu λ_2

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}; \quad C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} -i\omega & -1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2i\omega} \begin{pmatrix} -i\omega & -1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u(t, t=0) = e^{At} = C\,e^{Dt}\,C^{-1}$$

$$= \frac{1}{-2i\omega} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\omega & -1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{\sin\omega t}{\omega} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & \\ -\omega \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$$

Zur Zeit $t=0$ ist $U(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
wie es sein muss.

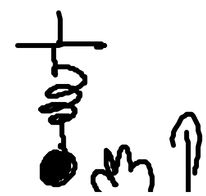
Aufgabe 36, Gl. (2)

$$G(t) = \theta(t)\, e^{-\frac{1}{2\tau}} \frac{1}{\omega'} \sin(\omega' t)$$

Äußere Kraft: inhomogenes System

$$\underline{y}'(t) = \underline{\underline{A}}\, \underline{y}(t) + \underline{b}(t)\,; \quad \underline{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)\,;$$



$$\underline{y}(t) = \underbrace{U(t,t_0)\,\underline{y}(t=t_0)}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} dt'\, U(t,t')\,\underline{b}(t')}_{\text{inhomogener Anteil}} ;$$

denn: $$\underline{y}'(t) = \left(\frac{d}{dt} U(t,t_0)\right) \underline{y}(t_0) + \underbrace{U(t,t)}_{E}\,\underline{b}(t) + \int_{t_0}^{t} dt' \underbrace{\left(\frac{d}{dt} U(t,t')\right)}\,\underline{b}(t')$$

beachte: $$\frac{d}{dt} U(t,t') - A\,U(t,t') = 0$$

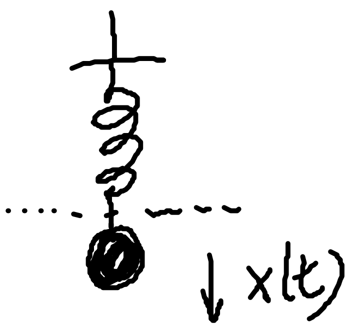
$$\Rightarrow \underline{y}'(t) = A\,U(t,t_0)\,\underline{y}(t_0) + \underline{b}(t) + A \int_{t_0}^{t} dt'\, U(t,t')\,\underline{b}(t')$$

$$= \boxed{A\,\underline{y}(t) + \underline{b}(t)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{p_0}{m}\,\frac{\sin\omega t}{\omega} + \int_0^t \Big[\underbrace{\frac{\sin\omega(t-t')}{\omega}}_{\text{retardierter Term}}\;\underbrace{f(t')\,dt'}_{\delta p(t')}\Big]$$

zusätzliche Impuls durch Krafteinwirkung in $t', t'+dt'$

Interpretation



$$\underbrace{\text{zusätzliche Impuls durch Krafteinwirkung in } t', t'+dt'}_{\text{zusätzliche Auslenkung } \delta x(t') \text{ durch Kraft } f(t')} \qquad \dot p = F$$

<u>Bemerkung</u>:

$$\ddot x + \omega^2 x = 0$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ Winkelfrequenz in $[s^{-1}]$

Setze $\omega = 1 \Longrightarrow$ $\boxed{\ddot x + x = 0}$

Wir messen die Zeit t in Einheiten von $1/\omega$:
wir führen eine dimensionslose Zeit τ ein

+

$\tau \equiv \omega t$,

formal $\quad t(\tau) \equiv \frac{\tau}{\omega}$; $\tilde{x}(\tau) = x(t(\tau))$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{d\tau^2}\tilde{x}(\tau) = \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{d}{dt}x(t)\cdot \underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{1/\omega}\Big)$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}x(t)\cdot\frac{1}{\omega^2} = -\omega^2 x(t)\cdot\frac{1}{\omega^2} = -\tilde{x}(\tau)$$

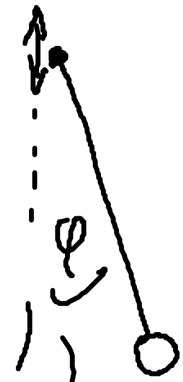
$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2}{d\tau^2}\tilde{x}(\tau) + \tilde{x}(\tau) = 0}$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \overset{1/\omega^2}{\Rightarrow} \frac{d^2}{d\underbrace{(\omega t)}_{\tau}{}^2} + x(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{d\tau^2}\tilde{x}(\tau) + \tilde{x}(\tau) = 0.$$

Effektiv haben wir $\omega = 1$ gesetzt.

Parametrische Resonanz



$$\ddot{x}(t) + \omega^2(t)\, x(t) = 0$$

z.B. $\quad \omega^2(t) = \omega_0^2 \left(1 + \varepsilon \sin \omega_{ext} t\right)$

$x = \varphi$
kleine Schwing.

$$\omega_{ext} = \frac{2\pi}{T}$$

T Periode der äußeren „Störung".

wir haben also ein DGL-System (linear)

$$y'(t) = A(t)\, y(t)$$

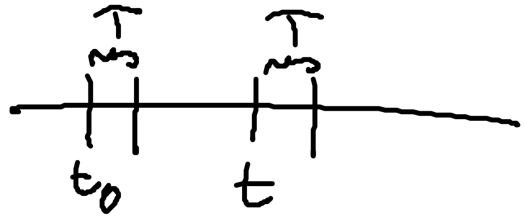
mit $A(t+T) = A(t), \quad T > 0$

Floquet-Theorie (Mathieu-Gleichung)
vom Typ

$$\ddot{x} + (a - b \sin t)\, x = 0$$

Lit: Abramowitz, Stegun
„Handbook of Mathematical Functions"

Zeitliches Verhalten (AWP)



Zeitentwicklungsoperator

$$\mathcal{U}(t,t_0)=\mathcal{U}(t+T,t_0+T).$$

$$y'(t)=A(t)\,y(t)$$

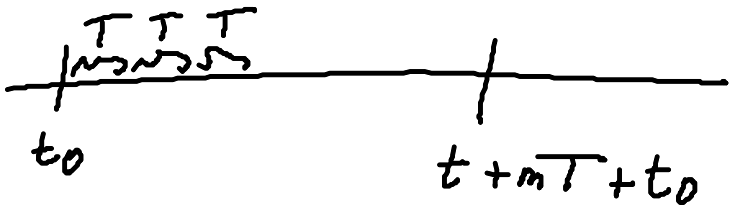
$$A(t+T)$$

$$\mathcal{U}(t_0+T,t_0)\equiv\mathcal{F}(t_0)$$

Floquet-Operator (Monodromie-Matrix).

Zeitentw. über eine Periode

<u>Beliebige Zeitentwicklung</u>



$$\mathcal{U}(t+mT+t_0,t_0)=\underbrace{\mathcal{U}(t+t_0,t_0)}_{\text{Rest}}\underbrace{\left[\mathcal{F}(t_0)\right]^m}$$

m-fache Potenz des Floquet-Operators bestimmt das Verhalten des DGL-Systems in seiner Zeitentw. hin zu großen Zeiten.