7.1.09

Aufgabe 36, Gl. (2)

$$G(t) = \theta(t)\, e^{-\frac{t}{2\tau}} \frac{1}{\omega'} \left(\sin \omega' t\right)$$

7.1.09

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega^2 x = f(t)$$

$$\underline{y}'(t) = A\, y(t) + b(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -1/\tau \end{pmatrix}$$

Systeme von DGL: $\underline{y}'(t) = \underline{\underline{A}}(t)\, y(t)$

$n \times n$ - Matrix

Lösen als AWP (Anfangswertproblem) mit AB (Anfangsbed.)

$$\underline{y}(t_0) = \begin{array}{ccc} \underline{e}_1 & \longmapsto & \underline{y}_1(t) \\ \underline{e}_2 & \longmapsto & \underline{y}_2(t) \\ \vdots & & \\ \underline{e}_n & \longmapsto & \underline{y}_n(t) \end{array}$$

Spaltenvektoren $\underline{y}_i(t)$ definieren

$$\mathcal{U}(t, t_0) = \Big(\underbrace{\underline{y}_1(t)}_{\text{Spaltenvektoren}}, \underline{y}_2(t), \dots, \underline{y}_n(t)\Big),$$

so dass

$$\underline{y}(t) = \mathcal{U}(t, t_0)\,\underline{y}(t_0)$$

lineare Abbildung.

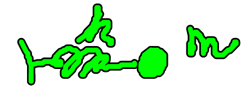
AB als Linearkomb. $\underline{y}(t_0) = c_1 \underline{e}_1 + \dots + c_n \underline{e}_n$

$$\Rightarrow \quad \underline{y}(t) = \mathcal{U}(t, t_0)\left[c_1 \underline{e}_1 + \dots + c_n \underline{e}_n\right]$$

$$= c_1 \underline{y}_1(t) + c_2 \underline{y}_2(t) + \dots + c_n \underline{y}_n(t)$$

wieder Lin.-komb. der <u>Fundamentallösungen</u> $\underline{y}_i(t)$.

Zeitunabhängige Matrix A, mit konstanten Koeff.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -1/\tau \end{pmatrix}$$

Homogener Fall (keine äußere Kraft)

$$\boxed{y'(t) = A\, y(t)} \; ; \quad y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t)/m \end{pmatrix}$$

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}\, y(t_0),$$

denn $y'(t) = A \underbrace{e^{A(t-t_0)}\, y(t_0)} = A\, y(t)$ ✓

außerdem $y(t_0) = e^{A(t_0-t_0)}\, y(t_0)$

Exponentialfkt. einer Matrix M

$$e^M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (M)^n$$

Annahme: $n \times n$ Matrix A habe n linear unabh. Eigenvektoren mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; $A = C D C^{-1}$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^{CDC^{-1} \cdot t} =$$

$$= C\, e^{Dt}\, C^{-1}, \quad \text{denn}$$

$$e^{CDC^{-1}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(CDC^{-1}t\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \underbrace{CD\cancel{C^{-1}}\,\cancel{C}D\cancel{C^{-1}}\,\cancel{C}D\cancel{C^{-1}} \cdots \cancel{C}DC^{-1}}_{CD^nC^{-1}}$$

$$= C\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D^n\right) C^{-1}$$

$$= C \quad e^{Dt} \quad C^{-1}$$

Außerdem mit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ folgt

$$e^{Dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{k\text{-mal}}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

also

$$\underline{y}(t) = C \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} C^{-1} \underline{y}(t=0)$$

C: Matrix der Eigenvektoren $\underline{x}_n$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ EW (Eigenwerte) von A.

$$C = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$$

$$AC = (A\underline{x}_1, \dots, A\underline{x}_n) = (\lambda_1 \underline{x}_1, \dots, \lambda_n \underline{x}_n)$$

$$= \underbrace{(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)}_{C} D \Rightarrow A = CDC^{-1} \quad \Leftrightarrow D = C^{-1}AC$$

<u>Eigenschaften des Zeitentwicklungsoperators</u> $\mathcal{U}(t, t_0)$

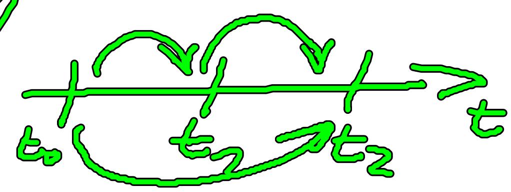
1) lineares System $\underline{y}'(t) = A(t)\underline{y}(t)$,

dann $\frac{d}{dt}\mathcal{U}(t, t_0) = A(t)\,\mathcal{U}(t, t_0)$;

$$U(t_0,t_0) = E$$

1a) $A(t) = A$ gilt $U(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}$

2) Für Zeiten t_0, t_1, t_2



$$U(t_2,t_0) = U(t_2,t_1)\,U(t_1,t_0)$$

z.B. $A(t) = A$; $e^{A(t_2-t_0)} = e^{A(t_2-t_1)}\, e^{A(t_1-t_0)}$

$$= e^{A(t_2-\cancel{t_1}+\cancel{t_1}-t_0)}$$

$$= U(t_2,t_0)$$

Hintereinander-Schaltung.

3) Wronski-Determinante

$W(t,t_0) = \det U(t,t_0)$ erfüllt

die DGL

$$\frac{d}{dt} W(t,t_0) = \Big(\underbrace{\mathrm{Tr}\,A(t)}_{\text{Spur } A(t)}\Big)\, W(t,t_0) \quad ; \quad W(t_0,t_0) = \underline{1}$$

Ohne Beweis.

Anwendung: Ungedämpfter Oszillator ohne äußere Kraft.

$$y'(t) = A\,y(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

EW: $\underline{\det A - \lambda E} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \underline{\lambda^2 + \omega^2 = 0},$

$\Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm i\omega$

Eigenvektoren von A: $\quad \underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}$ zu λ_1

$\underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix}$ zu λ_2

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}; \quad C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} -i\omega & -1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2i\omega} \begin{pmatrix} -i\omega & -1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad u(t, t=0) = e^{At} = C\,e^{Dt}\,C^{-1}$$

$$= \frac{1}{-2i\omega} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\omega & -1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Bigg(\cos \omega t \qquad \frac{\sin \omega t}{\omega} \qquad \Bigg)$$

$$= \begin{pmatrix} \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

Zur Zeit $t=0$ ist $U(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, wie es sein muss.

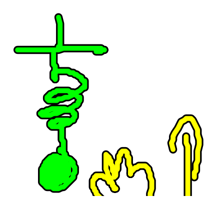
Aufgabe 36, Gl. (2)

$$G(t) = \theta(t)\, e^{-\frac{1}{2\tau}} \frac{1}{\omega'} \sin(\omega' t)$$

Äußere Kraft: inhomogenes System

$$\underline{y}'(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}(t) + \underline{b}(t)\,; \quad \underline{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)\,;$$



$$\underline{y}(t) = \underbrace{U(t,t_0)\,\underline{y}(t=t_0)}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} dt'\, U(t,t')\,\underline{b}(t')}_{\text{inhomogener Anteil}};$$

dann: $$\underline{y}'(t) = \left(\frac{d}{dt} U(t,t_0)\right)\underline{y}(t_0) + \underbrace{U(t,t)}_{E}\,\underline{b}(t) + \int_{t_0}^{t} dt' \underbrace{\left(\frac{d}{dt} U(t,t')\right)}\,\underline{b}(t')$$

beachte: $$\frac{d}{dt} U(t,t') - A\,U(t,t') = 0$$

$$\Rightarrow \underline{y}'(t) = A\,\underline{y}(t_0) + \underline{b}(t) + A \int_{t_0}^{t} dt'\, U(t,t')\,\underline{b}(t')$$

$U(t,\cancel{t'})$ t_0

$$= \boxed{A\,\underline{y}(t) + \underline{b}(t)}$$

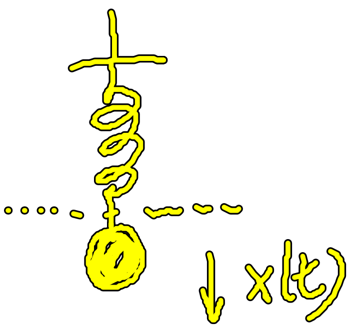
$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{p_0}{m}\,\frac{\sin\omega t}{\omega} + $$

$$+ \int_0^t \Big[\underbrace{\frac{\sin\omega(t-t')}{\omega}}_{\text{retardierter Term}}\; \underbrace{f(t')\,dt'}_{\delta p(t')}\Big]$$

Interpretation

$\delta p(t')$ zusätzlicher Impuls durch Krafteinwirkung in t', $t'+dt'$

$\dot p = F$



zusätzliche Auslenkung $\delta x(t')$ durch Kraft $f(t')$

<u>Bemerkung</u>: $\quad \ddot x + \omega^2 x = 0$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ Winkelfrequenz in $[s^{-1}]$

Setze $\omega = 1 \Rightarrow \boxed{\ddot x + x = 0}$

Wir messen die Zeit t in Einheiten von $1/\omega$:
wir führen eine dimensionslose Zeit τ ein

t

$\tau \equiv \omega t,$

formal $\quad t(\tau) \equiv \frac{\tau}{\omega}\,; \quad \tilde{x}(\tau) = x(t(\tau))$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{d\tau^2}\tilde{x}(\tau) = \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{d}{dt}x(t)\cdot\underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{1/\omega}\Big)$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}x(t)\cdot\frac{1}{\omega^2} = -\omega^2 x(t)\cdot\frac{1}{\omega^2} = -\tilde{x}(\tau)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2}{d\tau^2}\tilde{x}(\tau) + \tilde{x}(\tau) = 0}$$

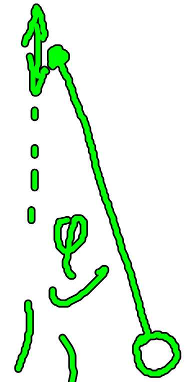
$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \overset{1/\omega^2}{\Longrightarrow} \frac{d^2}{d\underbrace{(\omega t)}_{\tau}{}^2} + x(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{d\tau^2}\tilde{x}(\tau) + \tilde{x}(\tau) = 0.$$

$\boxed{\text{Effektiv haben wir } \omega = 1 \text{ gesetzt.}}$

Parametrische Resonanz

$$\ddot{x}(t) \quad \omega^2(t)\, x(t) = 0$$



z.B. $\omega^2(t) = \omega_0^2\left(1 + \varepsilon \sin \omega_{ext} t\right)$

$x = \varphi$
kleine Schwing.

$$\omega_{ext} = \frac{2\pi}{T}$$

T Periode der äußeren „Störung".

wir haben also ein DGL-System (linear)

$$y'(t) = A(t)\, y(t)$$

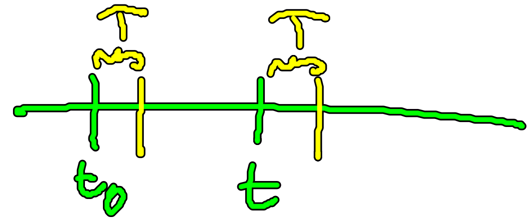
mit $A(t+T) = A(t)$, $T > 0$

Floquet-Theorie (Mathieu-Gleichung vom Typ

$$\ddot{x} + (a - b \sin t)\, x = 0 \text{)}$$

Lit.: Abramowitz, Stegun
„Handbook of Mathematical Functions"

Zeitliches Verhalten (AWP)



Zeitentwicklungsoperator

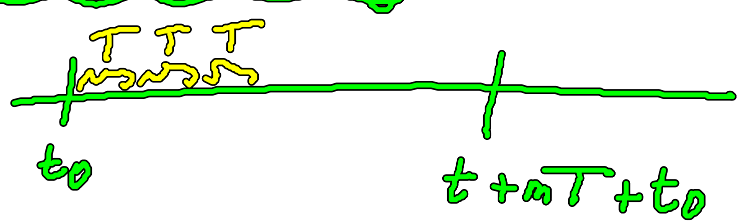
$$U(t, t_0) = U(t+T, t_0+T). \quad y'(t) = A(t)\,y(t)$$

$$A(t+T)$$

$$U(t_0+T, t_0) \equiv \mathcal{F}(t_0)$$ Floquet-Operator (Monodromie-Matrix).

Zeitentw. über eine Periode

<u>Beliebige Zeitentwicklung</u>



$$U(t+mT+t_0, t_0) = \underbrace{U(t+t_0, t_0)}_{\text{Rest}} \underbrace{\left[\mathcal{F}(t_0)\right]^m}$$

m-fache Potenz des Floquet-Operators bestimmt das Verhalten des DGL-Systems in seiner Zeitentw. hin zu großen Zeiten.