13.1.09

13.1.09

Schaukel $\qquad \ddot{x} + \omega^2(t)\,x = 0$

$\omega(t+T) = \omega(t)$, T Periode

$$\underline{y}'(t) = A(t)\,\underline{y}(t), \quad A(t) = A(t+T)$$

$$\mathcal{U}(T+t_0, t_0) \equiv \mathcal{F}(t_0)$$ Floquetoperator

$$\mathcal{F}^{m}\,\underline{u}_i = \lambda_i^{m}\,\underline{u}_i$$ λ_i: Floquet-Eigenwerte

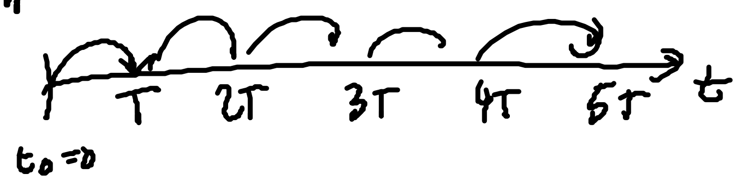
Anfangsbedingung $\underline{y}(t_0) = \underline{u}_i$

Falls $|\lambda_i| > 1$, wächst die AB mit der Zeit an

$$\underline{y}(nT+t_0) = \mathcal{F}^n \underline{u}_i = \lambda_i^n \underline{u}_i \Rightarrow \quad \| \quad \|$$

$$\rightarrow \|\underline{y}(nT+t_0)\| = \underbrace{|\lambda_i|^n}\ \underbrace{\|\underline{u}_i\|}_{\text{AB, auf 1 normiert}}$$

n: # der Perioden



Floquet-Theorem

$$\mathcal{F}\underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i \ ; \qquad \lambda_i = e^{\sigma_i T}$$

σ_i: Floquet-Exponent!

Floquet-Operator in Exponential-Form

$$\underline{\underline{\mathcal{F}}} = e^{\underline{\underline{S}} \cdot T}$$

↑ $n \times n$-Matrix mit EW σ_i

In der Basis der EV $\underline{u}_i$ ist die Matrix $\underline{\underline{S}}$ diagonal, $\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{pmatrix}$

Satz:

Sei $y'(t) = A(t)\,y(t)$ ein lineares DGL-System mit zeitl. periodischer Matrix $A(t) = A(t+T)$ mit Periode T:

$\Rightarrow$ Zeitentwicklungsoperator

$$\boxed{\mathcal{U}(t, t_0) = V(t)\, e^{S\cdot(t-t_0)}}$$

wobei S die $n\times n$-Matrix der Floquet-Exponenten und $V(t) = V(t+T)$ eine T-periodische $n\times n$-Matrix mit $V(t_0) = E$ (Einheitsmatrix) ist.

Beweis: Zeitentw. über Periode T

$$\mathcal{U}(T+t_0, t_0) = \underbrace{V(T+t_0)}_{V(t_0)=E.}\, e^{S(T+\cancel{t_0}-\cancel{t_0})} = \mathcal{F}(t_0) \quad \checkmark$$

$$\mathcal{U}(t, t_0) = \mathcal{U}(t+T, t_0+T)$$

$$\Rightarrow V(t)\cancel{e^{S(t-t_0)}} = V(t+T)\cancel{e^{S(t+\cancel{T}-[t_0+\cancel{T}])}}$$

$$V(t) = V(t+T) \Rightarrow V \text{ ist periodisch.}$$

$\blacksquare$

Parametrischer Linearer Oszillator

$$\ddot{x} + \omega^2(t)\,x = 0 \,; \quad \underline{y}' = A(t)\,\underline{y}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix} ; \quad \omega(t) = \omega(t+T)$$

$\mathcal{F}(t_0)$ ist eine 2×2 Matrix

$$\mathcal{F}(t_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} , \quad \text{EW durch}$$

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a+d) + ad - cb = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda^2 - \lambda \cdot \mathrm{Tr}\,\mathcal{F} + \underbrace{\det \mathcal{F}}_{1} = 0}$$

Die Matrix $A(t)$ in der DGL $\underline{y}' = A(t)\,\underline{y}$

ist spurlos, $\mathrm{Tr}\,A(t) = 0$

$$\Longrightarrow \det \mathcal{F}(t_0) = 1,$$

denn $\displaystyle \frac{d}{dt} W(t,t_0) = \underbrace{\mathrm{Tr}\,A(t)}_{0}\, W(t,t_0)$,

$$W(t_0,t_0) = 1$$

$$W(t,t_0) = \det \mathcal{U}(t,t_0)$$

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{Tr} \mathcal{F} + 1 = 0$$

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Tr} \mathcal{F} \pm \sqrt{(\operatorname{Tr} \mathcal{F})^2 - 4} \right)$$

für die zwei EW. Wegen $\det \mathcal{F} = \lambda_+ \cdot \lambda_- = 1$.

Für $|\operatorname{Tr} \mathcal{F}| < 2$ hat man zwei komplexe EW $\lambda_+ = \lambda_-^*$

Wegen $\lambda_+ \lambda_- = 1 \Rightarrow |\lambda_+||\lambda_-| = 1$

$\Rightarrow |\lambda_\pm| = 1$.

Für $|\operatorname{Tr} \mathcal{F}| \geq 2$ „wird es gefährlich"

$\Rightarrow$ Aufschaukeln von „Lösungen" (parametrische Resonanz).

Konkret $\omega^2(t) = \omega_0^2 (1 + \varepsilon \sin \omega_{ext} t)$

Stärke ε; $\omega_{ext} = \frac{2\pi}{T}$

ω_0 Eigenfrequenz des ungestörten Oszillators.

Idee: „Störungsentwicklung" für kleine $\varepsilon \ll 1$.

$\mathcal{F} = U(T,0)$ für $\varepsilon = 0$ berechnen

„Taylorentw." $\underbrace{\mathcal{F}(\varepsilon=0)} + \varepsilon \mathcal{F}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{F}_2 + \varepsilon^3 \mathcal{F}_3$

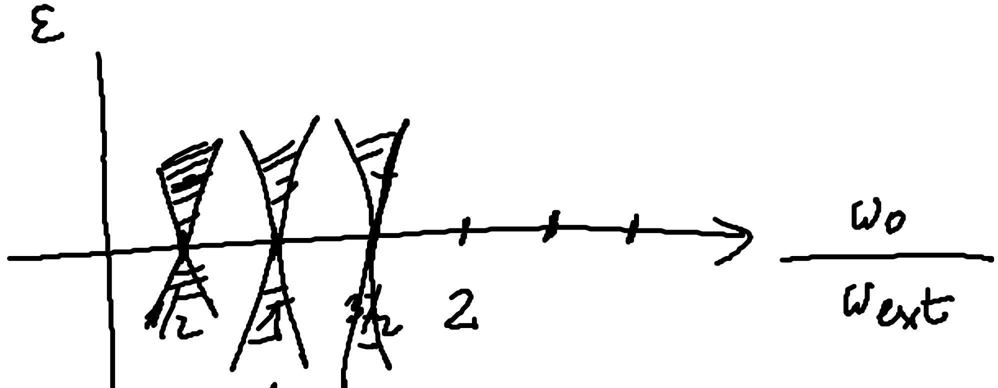
$$\mathcal{F}(\varepsilon=0) = \begin{pmatrix} \cos\omega_0 T & \frac{\sin\omega_0 T}{\omega_0} \\ -\omega_0 \sin\omega_0 T & \cos\omega_0 T \end{pmatrix}$$

Damit wird die kritische Aufschaukelbedingung

$$|\mathrm{Tr}\,\mathcal{F}| = |2\cos\omega_0 T| = 2 \qquad (\varepsilon = 0)$$

$$\Rightarrow |\cos\omega_0 T| = 1 \Rightarrow \omega_0 T = n\pi \,; \qquad \omega_{ex} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega_{ext} = \frac{2\omega_0}{n}, \quad n = 1,2,3,4,\dots$$

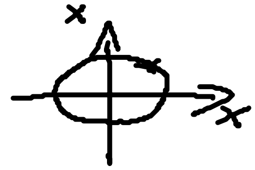


↑ parametrischer Resonanz

Jetzt numerische Lösung der DGL, um einen Überblick zu erhalten:

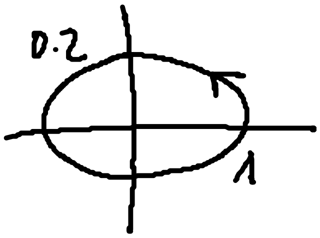
$$\ddot{x} + \omega^2(t)\,x = 0$$

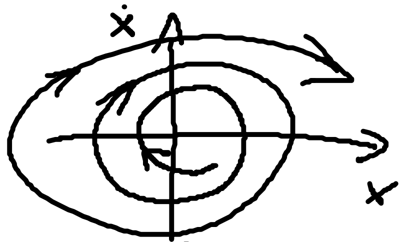
als System
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\omega^2(t)\,x$$
$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 + \varepsilon \sin(\omega_{ext} t)\right)$$

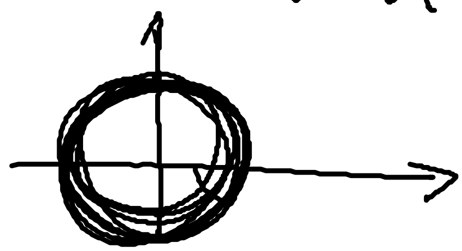


Phasenraum $(x, y = \dot{x})$

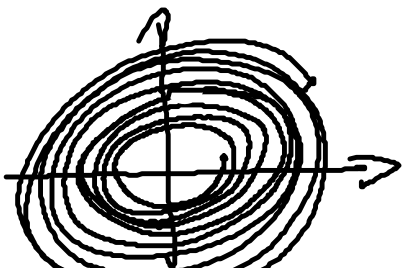
$\varepsilon = 0.3$







$\omega_0/\omega_{ext} = 0{,}25$ $\qquad = 0{,}5$ $\qquad 0.75$



$\omega_0/\omega_{ext} = 1{,}0$

parametrische Resonanz für $\frac{\omega_0}{\omega_{ext}} = \frac{1}{2}, 1$ (schon schwächer)

Nichtlineare Schwingungen

$$\ddot{x} + \underbrace{a(t)}_{\text{Reibungsterm}}\,\dot{x} + b(t)\,x = f(t) \qquad \text{linear}$$

$$\ddot{x} + a(x,t)\,\dot{x} + b(x,t) = 0$$

Bsp.: $\ddot{\varphi} + \delta \sin\varphi = 0$

zeitunabhängige Koeff. : autonome DGL

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad \text{Liénard-Gleichung}$$

Wir kennen bereits den Fall $f(x) \equiv 0$:

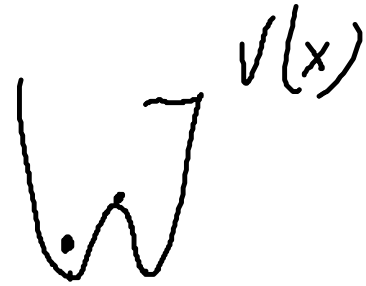
1d Bewegung, Masse m

$$m\ddot{x} = -V'(x);$$

Lösen mit Energieerhaltungssatz,

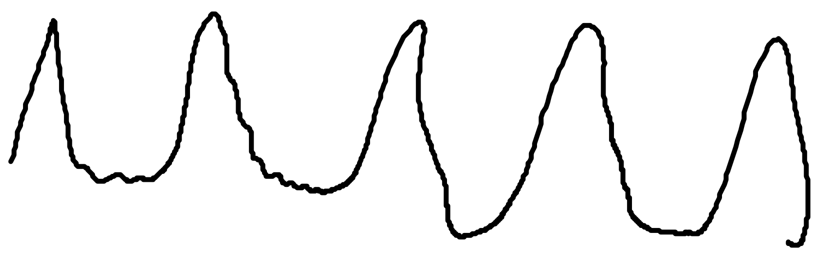
$$V(x) = \alpha x^2 + \beta x^4$$

(konservativ).



$\alpha < 0, \beta > 0$

Der van-der-Pol-Oszillator



$$\ddot{x} + \kappa(x^2-1)\dot{x} + x = 0, \quad \kappa \geq 0$$

Schreiben als dynamisches System (DS)

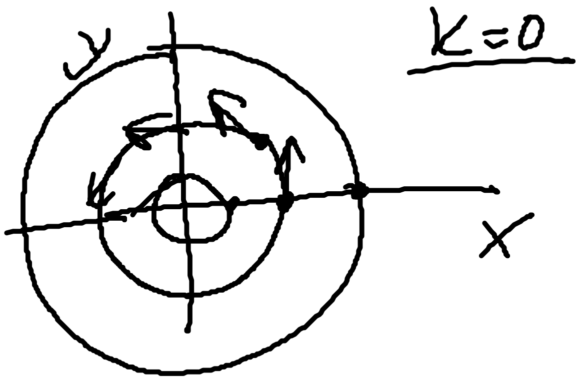
$$\underline{\dot{x}} = \underline{F}(\underline{x})$$

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x - K(x^2-1)y$$

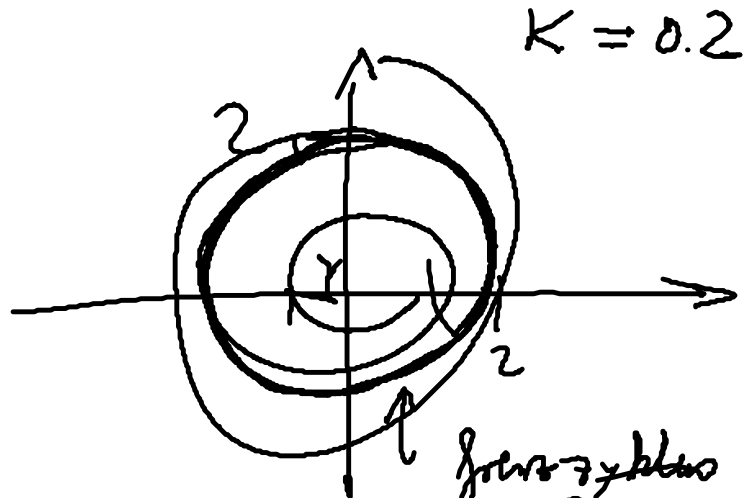
2d - System

$K=0$: harm. Osz. mit Frequenz $\omega = 1$.

Nichtlinearer Term $K(x^2-1)$



Kreise abh. von AB



Grenzzyklus mit Radius 2.

Analyse: Kleine $K \ll 1$, schwache Nichtlinearität

Naher Grenzzyklus mit Radius $r = 2$ (numerisch)

(*) $x(t) = r\cos t + \xi(t)$
$y(t) = r\sin t + \eta(t)$, zeige $r=2$ herauskommt

Betrachte zeitliche Änderung

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(x^2(t)+y^2(t)\right) = x\dot{x}+y\dot{y} =$$

$$= \cancel{xy} + y\left(\cancel{-x} - ky\left(x^2-1\right)\right) = -k\left(x^2-1\right)y^2$$

$$\overset{(*)}{=} -k\, r^2 \sin^2 t \left(r^2\cos^2 t - 1\right) + O(\xi,\eta).$$

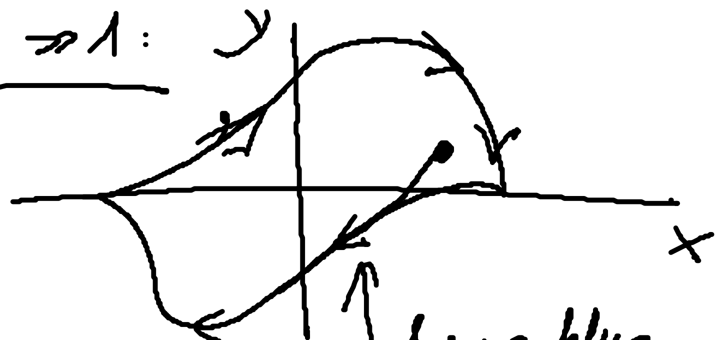
Forderung:

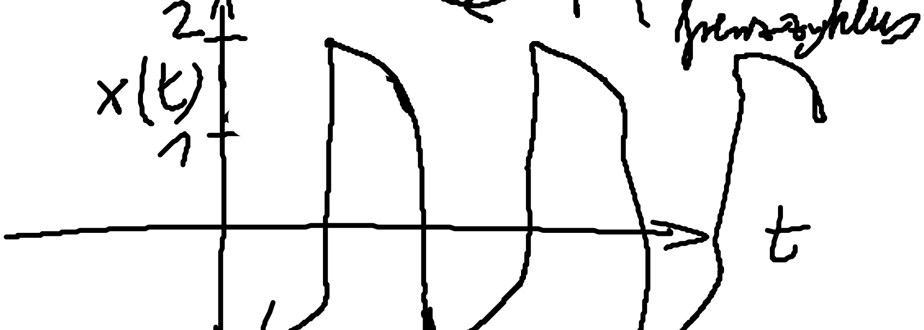
$$0 = \left(x^2+y^2\right)(t)\Big|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} dt\, \frac{d}{dt}\left(x^2+y^2\right)$$

$$\simeq \int_0^{2\pi} dt\, \left(-2kr^2\right)\left(r^2\cos^2 t - 1\right)\sin^2 t$$

$$= -\frac{\pi}{2} r^2\left(r^2-4\right) \Rightarrow r = 2$$

Große $k \gg 1$:





10 20

Relaxationsschwingung