14.1.09

14. 1. 09

$$\ddot{x} + K\left(x^2 - 1\right)\dot{x} + x = 0$$

<u>$K \gg 1$</u> :

$$DGL = \frac{d}{dt}\left[\underbrace{\dot{x} + K\left(\overbrace{\tfrac{1}{3}x^3 - x}^{f(x)}\right)}\right] + x = 0$$

$f(x) \equiv \frac{1}{3}x^3 - x \Rightarrow$

Nichtlinearität $f(x)$

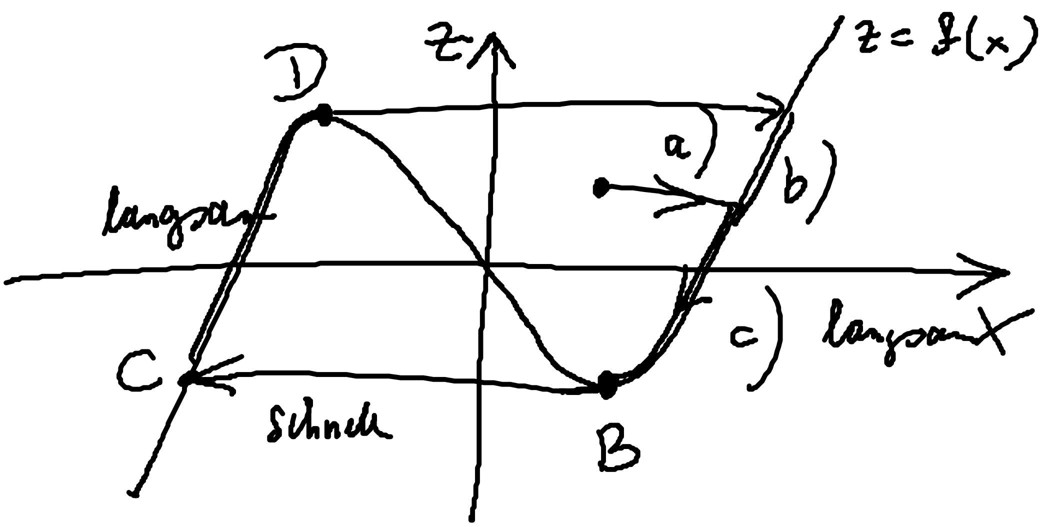
w

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{w} &= -x \\ \dot{x} &= w - K\,\underline{f(x)}\end{aligned}}$$

Umskalieren : $\dot{x} = K\Big(\underbrace{\tfrac{1}{K}w}_{\equiv z} - f(x)\Big)$

$\dot{x} = K\big(z - f(x)\big)$ „schnelle Gleichung"

$\dot{z} = -\frac{1}{K}x$ „langsame Gleichung"



$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

a) Mit großer Geschw. in pos. x-Richtung

b) In der Nähe von $z = f(x)$ ändert sich x nur noch langsam.

c) Langsame Änderung von z gemäß $\dot{z} = -\frac{1}{K}x$, z fest wie konstanter Parameter in $\dot{x} = K(z - f(x))$

Periode T des Grenzzyklus

Verweildauer auf den beiden langsamen Zweigen von $z = f(x)$. Dort gilt $z \approx f(x)$, also

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

$$-\frac{x}{K} = \frac{dz}{dt} \cong f'(x)\cdot\frac{dx}{dt} = (x^2-1)\frac{dx}{dt}$$

Daraus $\quad dt = -K\,\frac{x^2-1}{x}\,dx$,

integrieren $\quad T = 2\int_{2}^{1} dx\,\frac{-K(x^2-1)}{x} = K(3-2\ln 2)$

8. Dynamische Systeme (DS)

Definition Ein DS wird durch einen Phasenraum $M \subset \mathbb{R}^n$ und eine Abbildung $\phi^t : M \to M$ mit Zeitparameter $t \in \mathbb{R}$ (kontinuierlicher Fluss) oder $t \in \mathbb{Z}$ (diskretes DS) und

$$\phi^0(x) = x$$

$$\phi^t(\phi^s(x)) = \phi^{t+s}(x)$$ definiert.

Kontin. Fall: Fluss gegeben durch DGL System

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t),$$ $\underline{x} = \underline{x}(t)$ ist gesucht.

dessen Lösung als AWP eine **Trajektorie** $\underline{x}(t) = \phi^t(\underline{x}_0)$ im Phasenraum mit $\underline{x}(t=0) = \underline{x}_0$.

Spezialfall: $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$ autonomes DS (kein t-Abhängigkeit)

a) z.B. param. Oszillator $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\omega^2(t)\,x$$

2d DS, nicht autonom

b) van-der-Pol $\ddot{x} + \kappa(x^2-1)\dot{x} + x = 0$

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x - \kappa(x^2-1)y$$

2d DS, autonom

$$\underline{\dot{x}} = \underline{F}(\underline{x}) \; ; \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \quad \underline{F} = \begin{pmatrix} y \\ -x - \kappa(x^2-1)y \end{pmatrix}$$

Für $\underline{\dot{x}} = \underline{F}(x)$ (autonom) wegen der Eindeutigkeit der Lösung schneiden sich die Trajektorien im Phasenraum nicht.

Jedes nichtautonome DS der Dimension n kann in ein $n+1$-dimens. autonomes DS überführt werden.

Beispiel:

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\omega_0^2 (1 + \varepsilon \sin \omega_{ext} t)\, x$$

$\downarrow$ $t = z$

$$\frac{dt}{dt} = 1$$

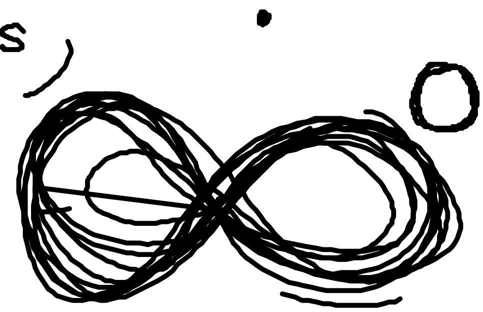
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\omega_0^2 \left(1 + \varepsilon \sin(\omega_{ext} \cdot z)\right) \cdot x$$
$$\dot{z} = 1$$

Wofür interessiert man sich?

- Wo enden Trajektorien zu großen Zeiten t:

  Fixpunkt, Grenzzyklus,

  seltsame Attraktoren



- Abhäng. der Lösung $x(t)$ von AB $x(t=0)$.
- Änderung von Systemparametern: Bifurkationstheorie.

Stabilitätsanalyse

1) Lineare Systeme

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}, \qquad \underline{\underline{A}} \quad n\times n \text{ Matrix}$$

Basis aus n Eigenvektoren $\underline{y}_i$

Lösung für beliebige AB $\underline{x}(0)$:

Zerlegung: $$\underline{x}(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \underline{y}_i$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{y}_i = \lambda_i\, \underline{y}_i$$

$$\underline{x}(t) = \underbrace{e^{At}}_{\mathcal{U}(t,0)\text{ Zeitentw.-Operator}} \underline{x}(0) = e^{At} \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{y}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \, e^{At} \underline{y}_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \, e^{\lambda_i t} \underline{y}_i$$

Zeitentw. wird durch die EW λ_i bestimmt!

$-2+i$

Für $t \to \infty$:

- Für $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ läuft der Anteil $c_i e^{\lambda_i t} \underline{y}_i \to 0$
- Für $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ läuft der Anteil $c_i e^{\lambda_i t} \underline{y}_i \to \infty$

Zerlegung des gesamten Vektorraums $\mathbb{R}^n$ in die Teilräume, aufgespannt von den $\underline{y}_i$ mit

$\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, stabiler Unterraum
$\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, instabiler Unterraum
$\operatorname{Re} \lambda_i = 0$, Zentrum-Unterraum.

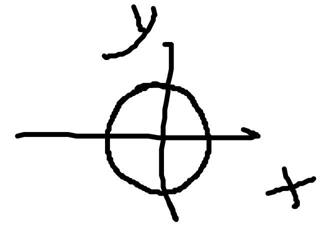
- Fall $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ ist uns vom harm. Oszillator

$\dot{x} = y$

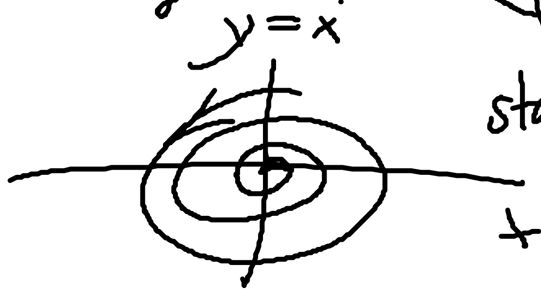
$\dot{y} = -x$, EW $\lambda_{1,2} = \pm i$

Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

Lösung läuft um den Ursprung herum



• gedämpfter Oszillator:



stabiler FP $(0,0)$

Fall für alle EW λ_i gilt: $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, dann heißt die Lösung $\underline{x}(t)$ des linearen DS $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ asymptotisch stabil.