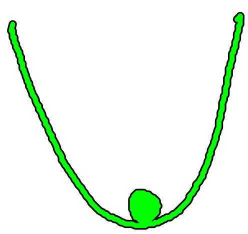
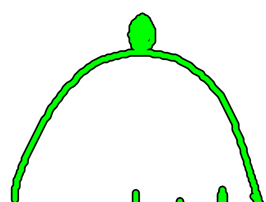
20.1.09

20.1.09

$V(x)$



stabil



instabil

$$\dot{p} = -V'(x) = F(x)$$

Vorzeichen

$\propto -x$

linear

$\propto +x$

linear

$\underline{\dot{x}} = \underline{F}(\underline{x})$ autonomes DS

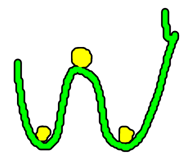
Def: Ein Punkt $\underline{x}^*$ eines DS heißt Fixpunkt, wenn

$$\underline{F}(\underline{x}^*) = 0$$

Beispiele:

$$\dot{p} = -V'(x)$$
$$\dot{x} = p$$

$f=1$ Freiheitsgrad
2-dimens. DS.



$V(x)$

Fixp. aus

$$0 = -V'(x^*)$$
$$0 = p^*$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

Vektorfeld $\underline{F}(\underline{x})$ um den FP (Fixpunkt) Taylor-entwickeln,

$$\underline{F}(\underline{x}) = \underbrace{\underline{F}(\underline{x}^*)}_{0} + DF(x^*) \cdot (\underline{x} - \underline{x}^*) + \dots$$

Jacobi-Matrix

$$\left(DF(x^*)\right)_{kl} = \left.\frac{\partial F_k}{\partial x_l}\right|_{x^*}$$

Beispiel: $\quad \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$,

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad \underline{F}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x^2 + \sin y \\ 1 + e^{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

$$DF(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

Wir brauchen den EW und EVektoren der Jacobi-Matrix:

<u>Def</u>: Die EW λ_i der Jacobi-Matrix $DF(\underline{x}^*)$ heißen charakteristische Exponenten des Fixpunktes $\underline{x}^*$. Falls für alle $i = 1, \ldots n$ $\mathrm{Re}\, \lambda_i \neq 0$, heißt der Fixpunkt <u>hyperbolisch</u>.

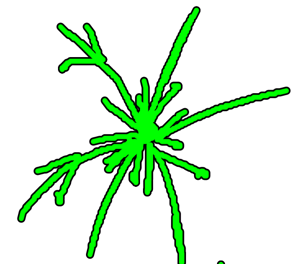
<u>Satz</u> Ein hyperbolischer FP ist stabil, wenn alle charakteristischen Exponenten negativen Realteil haben und instabil, falls mindestens einer positiven Realteil hat.

Zweidimensionales Dynamisches System

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}) \quad \text{mit} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{F}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\underline{x}) \\ F_2(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

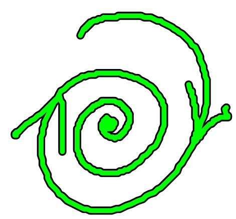
Die Jacobi-Matrix ist zweidimensional, hat zwei Eigenwerte λ_1, λ_2.

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$: stabiler Knoten



läuft in den FP hinein

$\lambda_1 = \lambda_2^*$, $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$, stabiler Strudel



Beispiel: gedämpfter harm. Osz. in $d=1$, $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

als DS $\quad y' = A y, \quad y = \begin{pmatrix} x \\ p/m \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -1/\tau \end{pmatrix}$

EW der Jacobi-Matrix $DF = A$ hier wegen der Linearität des Systems.

Des Fixpunkts $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

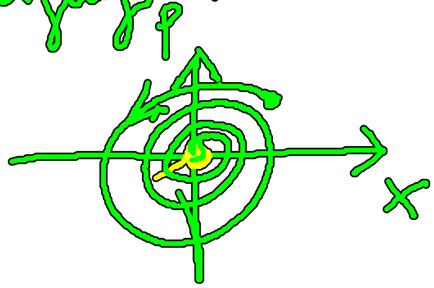
Die Eigenwerte von A sind; $\lambda_\pm = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2}$

Schwingfall $\omega_0 > \frac{1}{2\tau}$, dann

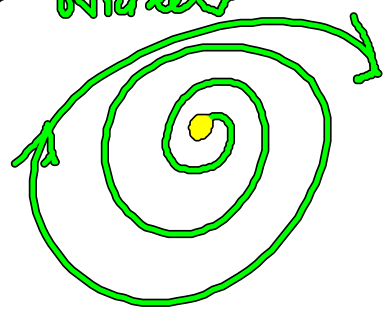
ist $\lambda_\pm = -\frac{1}{2\tau} \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}}_{\text{reell}}$

Deshalb ist der FP (0,0) ein stabiler Strudel)

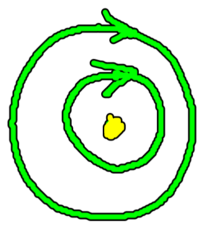
der Bewegung im Phasenraum (x, p) ist



$\lambda_1 = \lambda_2^*$, Re $\lambda_i > 0$ instabiler Strudel

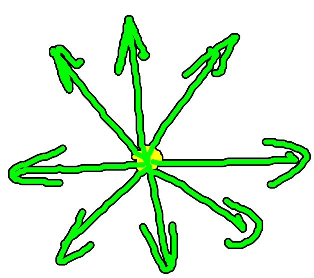


$\lambda_1 = \lambda_2^*$, Re $\lambda_i = 0$

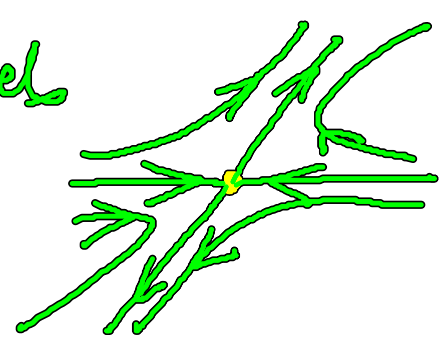


Wirbel

$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, instabiler Knoten



$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ Sattel



Satz: Konservative DS haben keine stabilen Fixpunkte.

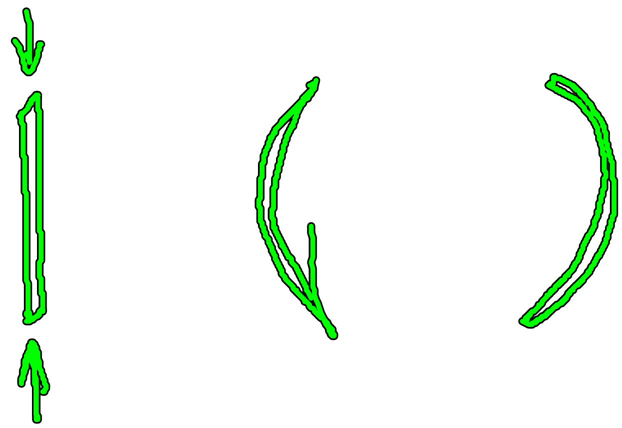
Denn: $\operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}^*) = 0$,

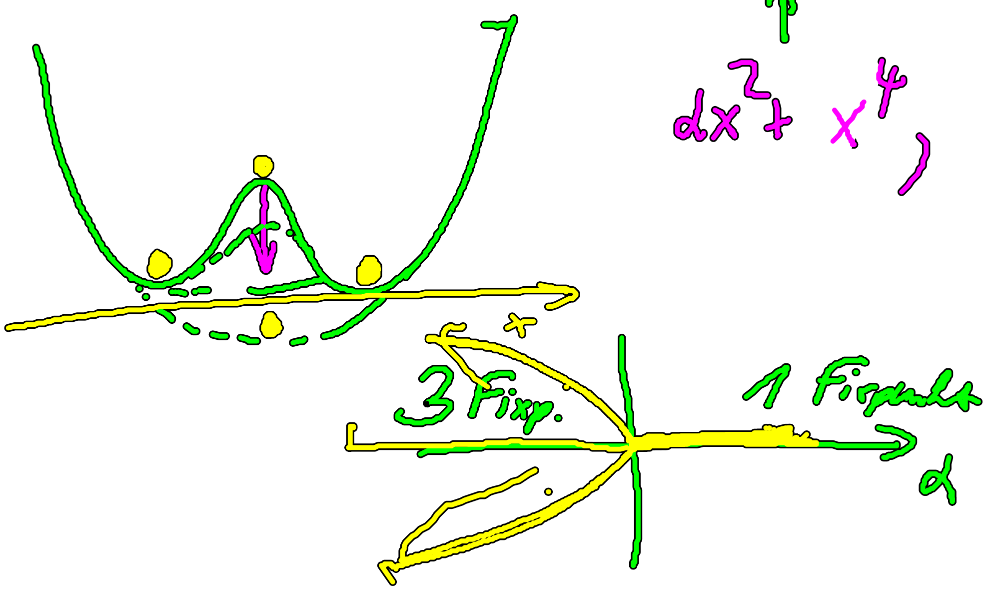
$$\operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}^*) = \operatorname{Tr} D\underline{F}(\underline{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Falls $\operatorname{div} F = 0$, können nicht alle λ_i negativen Realteil haben.

Bifurkationen

Linear





$\alpha x^2 + x^4$,

$\alpha < 0$

$\alpha = 0$

$\alpha > 0$

STROGATZ

1) Sattel-Knoten-Bifurkation

$$\dot{x} = F(x) = r + x^2 \quad , \quad r \in \mathbb{R}$$

Parameter

FP: $\dot{x} = 0 = r + x^2$

$x^2 = -r$

$r < 0$: zwei FP $x^*_\pm = \pm\sqrt{-r}$

$x^*_- = -\sqrt{-r}$; $F'(x^*_-) = -2\sqrt{-r} < 0$, stabil

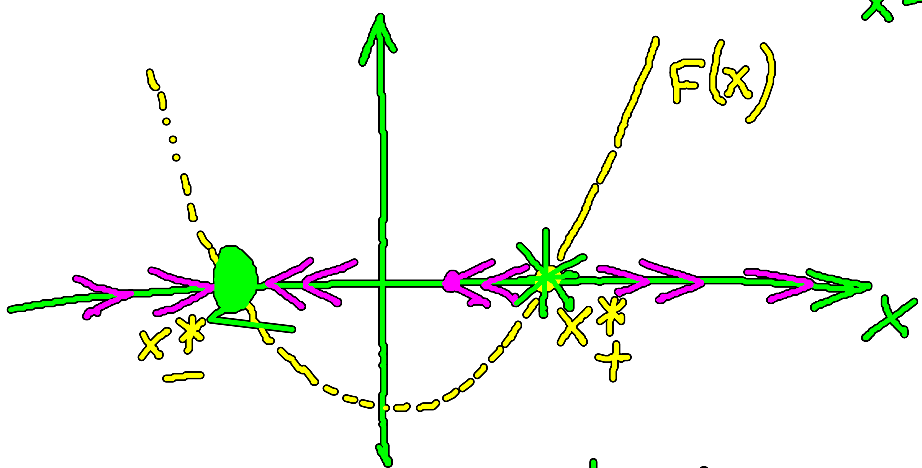
$x^*_+ = +\sqrt{-r}$, $F'(x^*_+) = 2\sqrt{-r} > 0$, instabil

$r > 0$: kein FP

$r = 0$: FP $x^* = 0$

Der Phasenraum ist hier die x-Achse

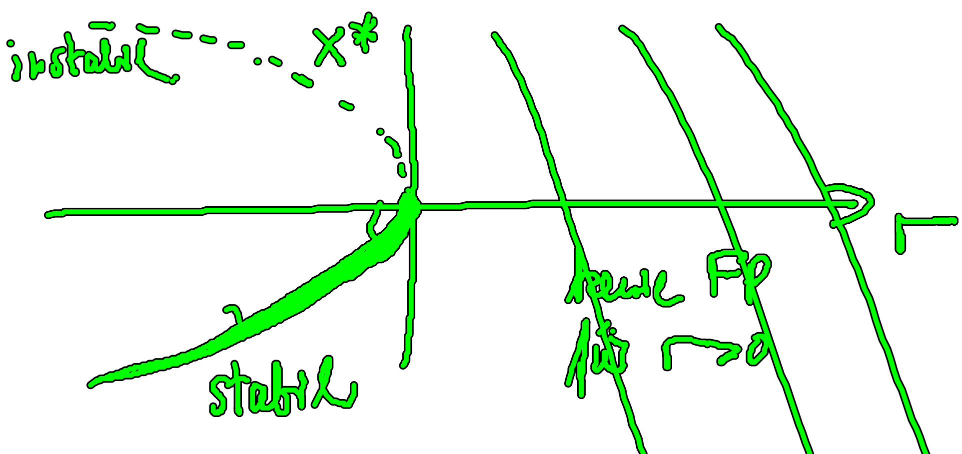
$$\dot{x} = \underbrace{r + x^2}_{F(x)}$$



$x(t)$

$\dot{x}$: Geschwindigkeit

Der Fluss läuft auf den stabilen FP x^*_- zu, und vom instabilen FP x^*_+ weg.



$\pm\sqrt{-r}$

Zweidimensionaler Fall:

$$\dot{x} = \mu - x^2, \quad \mu \in \mathbb{R} \text{ reeller Kontrollparameter}$$
$$\dot{y} = -y$$

FP: $0 = \mu - x^2 \Rightarrow x^* = \pm\sqrt{\mu} \quad (\mu > 0)$

$0 = -y \Rightarrow y^* = 0$

$\underline{x}^*_- = (-\sqrt{\mu}, 0)$

$\underline{x}^*_+ = (\sqrt{\mu}, 0)$ für $\mu > 0$

Stabilität folgt aus der Jacobi-Matrix

$$DF = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_{1,2} = \begin{matrix} -2x \\ -1 \end{matrix}$$

$\underline{x}^*_-$: $\lambda_{1,2} = \begin{matrix} 2\sqrt{\mu} \\ -1 \end{matrix}$ Sattel

$\underline{x}^*_+$: $\lambda_{1,2} = \begin{matrix} -2\sqrt{\mu} \\ -1 \end{matrix}$ stabiler Knoten

Betrachte Bifurkationsdiagramm als Funktion von μ

Transkritische Bifurkation

$$\dot{x} = rx - x^2 \qquad r \in \mathbb{R}$$

$$= x(r-x)$$

zwei FP: $x_0^* = 0$

$x^* = r$