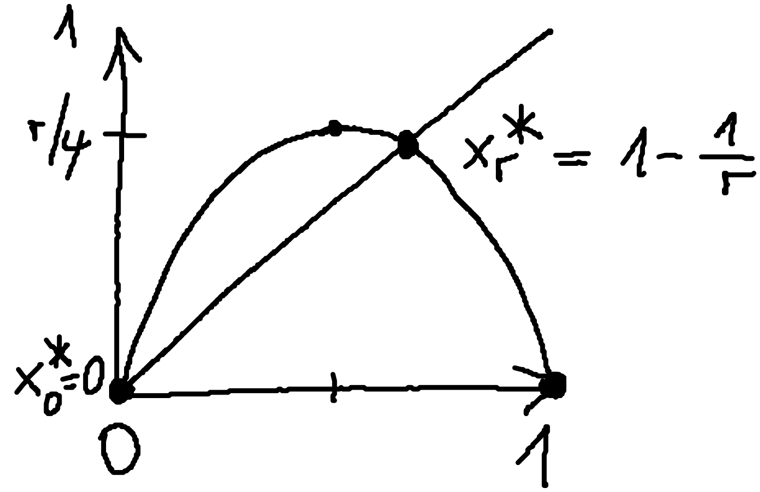
28.1.09

Logistische Abbildung (Iterierte Abbildung)

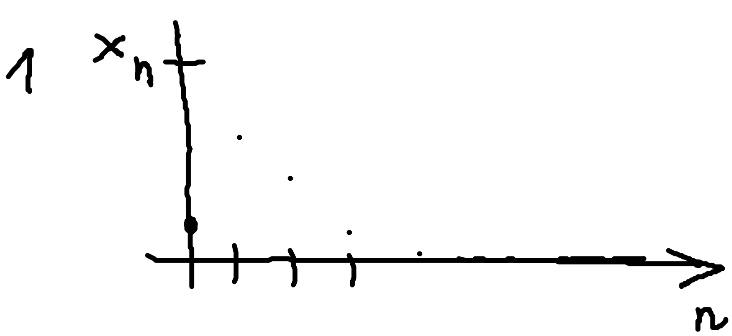
$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \; ; \quad r \geq 0$$

$0 \leq r \leq 4$



$x_{n+1} = f(x_n)$

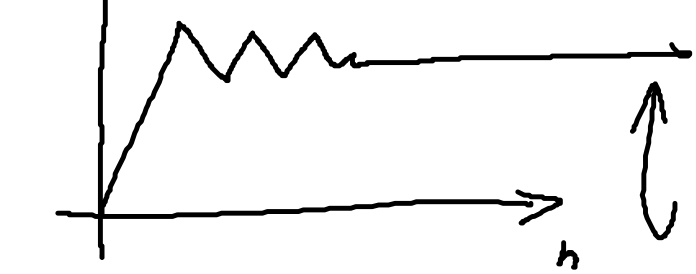
$f(x) = r x (1 - x)$



$r < 1$

stirbt aus

$x_n \to 0, \; n \to \infty$

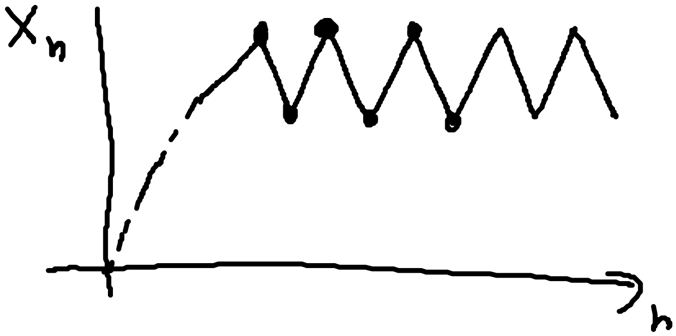


$1 < r < 3$

stabiler Wert

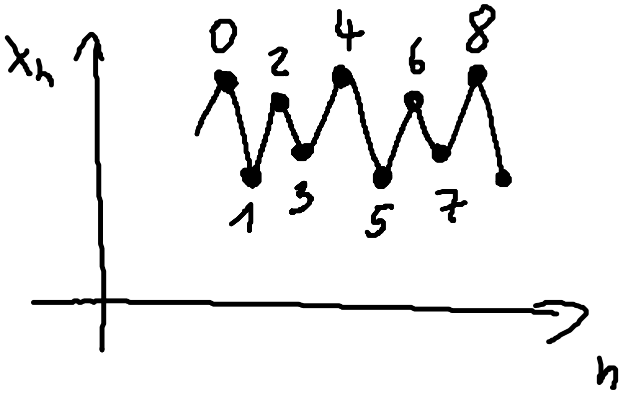
stationäres x_n, $n \to \infty$

Bei $r=3$ wird x_r^* instabil.

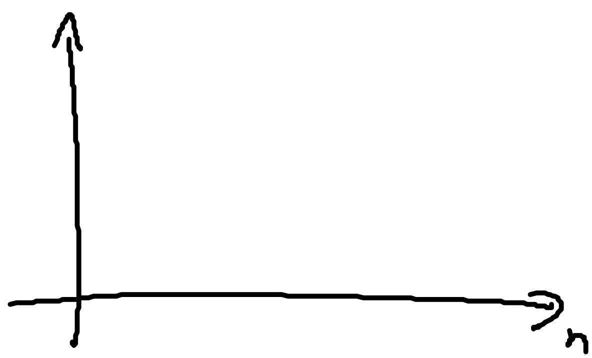


Oszilliert zwischen zwei verschiedenen Werten

$r = 3{,}01$ Periode 2



$r \geq r_2 = 3.449$
Oszillationen der Periode 4



$\downarrow$ Periodenverdopplung

Periode 8

bis $r_\infty = 3.5699\ldots$

„Oszillationen mit Periode ∞"

- Wir finden Periodenverdopplung

	Periode
$r_1 = 3$	2
$r_2 = 3.449$	4
$r_3 = 3.54409$	8

$r_\infty = 3.5699\ldots$

$$\delta \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.669\ldots$$

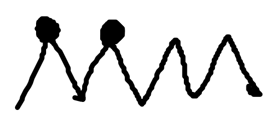
Feigenbaum-Konstante

- periodische Fenster zwischen chaotischen Bereichen.

Periodenverdopplung

bei $r = 3$: Iteration $x_{n+1} = f(x_n)$

Fixpunkt $x^{(2)}$ mit



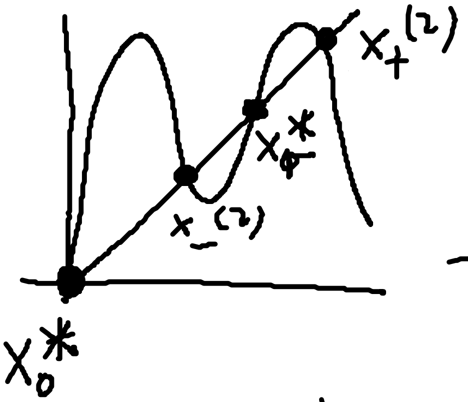
$$f\left(f\left(x^{(2)}\right)\right) = x^{(2)}$$

f zweimal hintereinander schalten, $\quad f(x) = rx(1-x)$

f^2 gibt quartische Gleichung,

$$f\Big(\underbrace{f\left(x_0^*\right)}\Big) = f\left(x_0^*\right) = x_0^* \quad \rightarrow \quad x_0^* \text{ ist FP von } f^2$$

Ebenso x_0^* x_r^* $\Rightarrow$ $x_{0,r}^*$ können ausfaktorisiert werden.



$$f^2(x) = x$$

$$\Rightarrow x_\pm^{(2)} = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$$

Stabilität: $$\left| \frac{d}{dx} f(f(x)) \right|_{x = x_\pm^{(2)}} < 1$$

$$\Rightarrow \quad 3 < r < 1+\sqrt{6}$$

Periodisches Fenster innerhalb des chaotischen Bereichs:

$r \approx 3.83$ Periode-3-Zyklus

3-fach-Iteration $f(f(f(x))) \equiv f^3(x)$

Schnittpunkte $f^3(x) = x$,

i. A. acht Schnittpunkte,

zwei davon uninteressant (FP x_0^*, x_m^* von $f(x)$).

Von den restlichen 6 sind 3 stabil,

3 instabil.