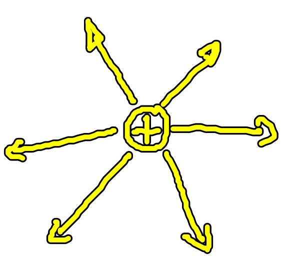
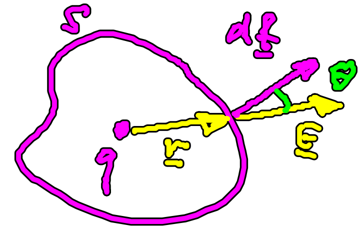


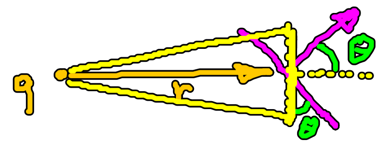
Quellen des elektrischen Feldes:

Punktladung q bei $\underline{r}' = 0$: $\underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\underline{r}}{r^3}$

Elektr. Kraftfluss durch eine geschlossene Oberfläche S um q:

$$\oint_S d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{d\underline{f}\cdot\underline{r}}{r^3} \overset{*}{=} \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\underbrace{\oint d\Omega}_{4\pi} = \frac{q}{\epsilon_0}$$





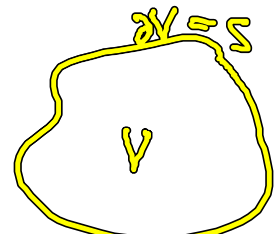
$df\cos\theta = r^2 d\Omega$

$* \quad d\underline{f}\cdot\underline{r} = df\, r\cos\theta = r^3 d\Omega$

$$\Longrightarrow \boxed{\epsilon_0 \oint d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = q}$$

Verallg. auf kontin. Ladungsverteilung:

$$\boxed{\epsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r'\, \rho(\underline{r}')}$$ für beliebige Vol. V



von V eingeschloss. Ladung

Integralform des Coulomb-Gesetzes

(Gauß'sches Gesetz)

Gauß'scher Integralsatz

$$\oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r\, \mathrm{div}\,\underline{E}(\underline{r})$$ (einfach zus. häng. Gebiet)

$$\Longrightarrow \int_V d^3r\, \epsilon_0\, \mathrm{div}\,\underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r\, \rho(\underline{r})$$ bel. Vol. V

$$\Longrightarrow \boxed{\epsilon_0\, \mathrm{div}\,\underline{E}(\underline{r}) = \rho(\underline{r})}$$ differentielle Form des Gauß'schen Gesetzes

Die el. Ladungen sind die Quellen des el. Feldes

Elektrostatik

(i) $\underline{E}(\underline{r})$ besitzt ein skalares Pot.: $\underline{E}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\phi(\underline{r})$

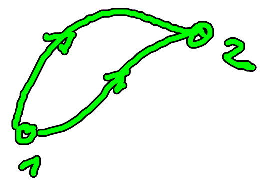
$\Updownarrow$

(ii) $\boxed{\operatorname{rot} \underline{E} = 0}$ $\quad \underline{\nabla} \times \underline{E} = 0$ stat. el. Feld ist wirbelfrei

$(\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi \equiv \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \phi \equiv 0)$

$\Updownarrow$

(iii) $\int_1^2 \underline{E}\, d\underline{s}$ wegunabhängig

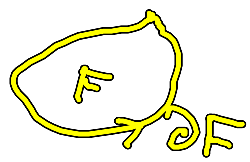


$\Updownarrow$

(iv) $\oint \underline{E}\, d\underline{s} = 0$

Beweis (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) mit Hilfe des Stokes'schen Satzes:

$$\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} = \int \operatorname{rot} \underline{E} \cdot d\underline{f}$$



(ii) $\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} = 0 \Rightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (iii)

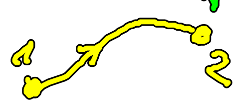
(iv) $\oint \underline{E}\, d\underline{s} = 0 \Rightarrow \int \operatorname{rot} \underline{E} \cdot d\underline{f} = 0$ bel. F $\Rightarrow \operatorname{rot} \underline{E} = 0$ $\square$

Arbeit im el. Feld:

Arbeit, um Ladung q vom Ort $\underline{r}_1 \to \underline{r}_2$ zu verschieben:

$$W = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{s} = q \int_1^2 \underline{E} \cdot d\underline{s} = -q \int_1^2 d\underline{s} \cdot \underline{\nabla} \phi = -q \int_1^2 d\phi$$

$$= q(\phi(\underline{r}_1) - \phi(\underline{r}_2))$$



Potenzialdifferenz = el. Spannung

1.3 Poisson-Gleichung und Green'sche Fkt.

$\underline{E} = -\underline{\nabla} \phi$ eingesetzt in $\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$

$$\boxed{\Delta \phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r})}$$

Poisson-Gl.

part. Dgl. zur Berechnung des el. Pot. für vorgeg. Ladungsvert.
wird eindeutig durch Randbed.:

(i) $\phi(\underline{r}) \to 0$ hinreichend rasch für $|\underline{r}| \to \infty$

oder

(ii) $\phi(\underline{r})$ sei geg. auf Leiteroberflächen im Endlichen

Lösung zu (i): $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ rasch abfallendes $\rho(\underline{r}')$

eingesetzt:

$$\Delta\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\underline{r}') \, \Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \quad (1)$$

a) für $\underline{r}' \neq \underline{r}$:

$$\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \underline{\nabla}_r \cdot \underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -\underline{\nabla}_r \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$$= -\frac{\underline{\nabla}_r \cdot (\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} - (\underline{r}-\underline{r}') \underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$^* \; \underline{\nabla} \cdot \underline{r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3$

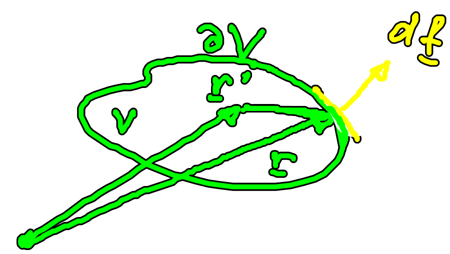
$\underline{\nabla} r = \frac{\underline{r}}{r}$

$$\overset{*}{=} -\frac{3}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} + 3(\underline{r}-\underline{r}') \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^4}$$

$$= 0$$

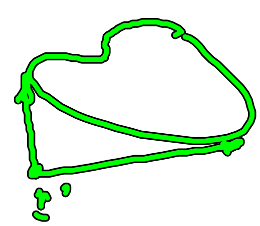
b)

$$\int_V d^3r' \, \Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \int_V d^3r' \, \underline{\nabla}_{r'} \cdot \underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$



gaußscher Satz

$$= \int_{\partial V} d\underline{f}' \cdot \underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$



$$= -\int_{\partial V} d\underline{f}' \cdot \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$$= -\oint d\Omega$$

$$= \begin{cases} -4\pi & \text{für } \underline{r}' \in V \\ 0 & \text{für } \underline{r}' \notin V \end{cases}$$

Erg.

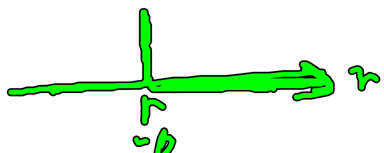
$$\boxed{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -4\pi\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$$

Dirac'sche δ-Funktion (δ-Distribution)

$$\int_V d^3r\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_0) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \underline{r}_0 \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta(\underline{r}-\underline{r}_0) = 0 \quad \forall\, \underline{r} \neq \underline{r}_0$$

$$\int_V d^3r\, f(\underline{r})\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_0) = f(\underline{r}_0) \iff \delta_{\underline{r}_0} f = f(\underline{r}_0)$$



Poisson-Gl.:

$$\Delta\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\rho(\underline{r}')\,\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$= \frac{-4\pi}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\rho(\underline{r}')\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r})$$ Poisson-Gl. erfüllt! $\square$

Physikal. Interpret. von $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$

$\Rightarrow$ Coulomb-Pot. $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ ist die Lösung der Poisson-Gl. im ganzen $\mathbb{R}^3$ für eine Pkt.ladg. $q=1$ bei $\underline{r}'$

Green'sche Fkt.

Allg. Methode zur Lösung inhomogener (part. oder gewöhnl.) Dgln. für gegebene Inhomogenitäten.

z.B.: gedämpfter getriebener harmon. Osz.
Poisson-Gl.
Wellengl.
Streutheorie (QM)
Wärmeleit.gl.

Strategie:

(i) Zuerst Lösung der Dgl. für δ-förmige Inhomogenität

$$\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

d.h. Green'sche Fkt. ist Lösung für Pkt.ladung $q=1$ bei $\underline{r}'$.

Für die spezielle Randbed. $\phi \xrightarrow{r\to\infty} 0$ ist

$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

(ii) Dann Lösung für bel. Inhomogenität $\rho(\underline{r})$ durch Faltung mit der Green'schen Fkt.:

$$\boxed{\phi(\underline{r}) = \int d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r}')}$$

Abstraktes Lösungsschema:

$$\boxed{\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho} \quad \xRightarrow[\text{Invertierung des Diff.op.}]{\text{Lösung durch}} \quad \boxed{\phi = \tilde{G}\rho}$$

Diff.op. Δ — Green'sche Op. $\tilde{G}$

$\Downarrow$ Fourier-Trafo

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\, \hat{\phi}(\underline{k})\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

$\Downarrow$

$\Uparrow$

$$\phi(\underline{r}) = \int d^3r\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r})$$

Faltungssatz: Integral op.

Fourier $\Uparrow$ - Rücktrafo

$$\boxed{-k^2\hat{\Phi} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\hat{\rho}} \Longrightarrow \boxed{\hat{\Phi} = \hat{G}\hat{\rho}} \qquad \hat{G} := \frac{1}{\varepsilon_0 k^2}$$

$$^{*}\ \Delta_r \Phi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, \hat{\Phi}(\underline{k})\, \underbrace{\Delta_r e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}}_{-\underline{k}^2} =$$