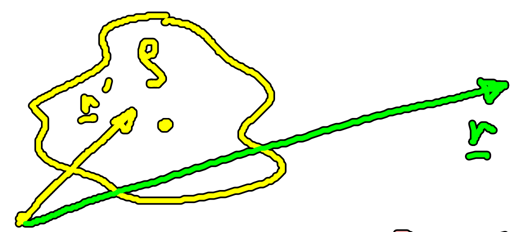
$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

1.4. Elektrische Multipol-Entwicklung

Betrachte räumlich begrenzte Ladungsverteilung $\rho(\underline{r}')$ in der Umgebung von $\underline{r}'=0$



Frage: asymptot. Verhalten von $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ für $r \to \infty$

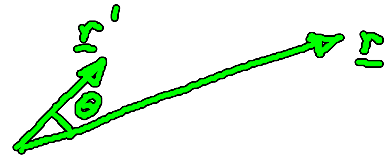
Methode: Entwicklung des Integranden in eine Taylorreihe für $r \gg r'$:

$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} (\underline{r}' \cdot \nabla_r)^l \, G(\underline{r})$$

$$\phi(\underline{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int d^3r' \, (\underline{r}' \cdot \nabla)^l \, G(r) \, \rho(\underline{r}')$$

explizit mit $G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\underline{r}-\underline{r}'|}$ Entwicklung:

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \left(r^2 - 2\,\underline{r}\cdot\underline{r}' + r'^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1-2\frac{r'}{r}\cos\theta + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$



Durch die für $r'<r$, $|\xi|<1$ konvergente Reihe:

$$\underbrace{\left(1-2\frac{r'}{r}\xi+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)^{-1/2}}_{\text{Erzeugende}} = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\xi)$$

sind die <u>Legendre-Polynome</u> $P_l(\xi)$ definiert
(Kugelfunktionen)

$$P_l(\xi) = \frac{1}{l!}\left[\frac{\partial^l}{\partial t^l}\left(1-2t\xi+t^2\right)^{-1/2}\right]_{t=0}$$

insbesondere

$$P_0(\xi) = 1$$
$$P_1(\xi) = \xi = \cos\theta$$
$$P_2(\xi) = \frac{1}{2}\left(3\xi^2-1\right) = \frac{1}{4}\left(3\cos(2\theta)+1\right)$$

also

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}\int d^3r'\,\rho(\underline{r}')\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty} Q_l\, r^{-l-1}$$

mit $Q_l = \int d^3r'\, r'^l\,\rho(\underline{r}')\,P_l(\cos\theta)$ „2^l-Pol"

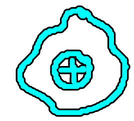
Entwicklung nach Potenzen von r!

Für stark lokalisierte Ladungsverteilungen ($r' \ll r$) konvergiert die Reihe schnell:

<u>$l=0$</u> : $\phi^{(0)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_0}{r}$ $\qquad Q_0 = \int d^3r' \rho(\underline{r}')$ el. Monopol (Gesamtladung)

fällt am langsamsten ab

$\Longrightarrow$ Ladungsverteilung wirkt in großer Entfernung wie Punktladung



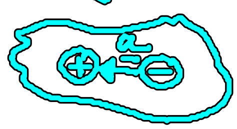
<u>$l=1$</u> : $\phi^{(1)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^3}$ $\qquad Q_1 = \int d^3r' \rho(\underline{r}') \underbrace{r'\cos\theta}_{\frac{\underline{r}'\cdot\underline{r}}{r}} = \frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r}$

$\underline{p} := \int d^3r' \rho(\underline{r}')\underline{r}'$

(Dipolmoment)

fällt $\sim \frac{1}{r^2}$ ab,

wichtigster Term für insgesamt neutrale Körper ($Q_0 = 0$)



<u>Beispiel</u> : 2 Punktladungen $q, -q$ bei $\underline{r}_1, \underline{r}_2$

$$\rho(\underline{r}') = q\left[\delta(\underline{r}'-\underline{r}_1) - \delta(\underline{r}'-\underline{r}_2)\right]$$

$$Q_0 = 0, \quad \underline{p} = q(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) = q\underline{a}$$

<u>Feld des Dipolpotenzials</u>:

$$E_i = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\partial_i \frac{p_k x_k}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3x_i p_k x_k}{r^5} - \delta_{ik}\frac{p_k}{r^3}\right)$$

(Summationskonv.!)

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^5}\left[3(\underline{p}\cdot\underline{r})\underline{r} - r^2\underline{p}\right]$$

$$\sim \frac{1}{r^3} \quad \text{für } r \to \infty$$

$\underline{\ell = 2}$: $\phi^{(2)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{r^3}$, $Q_2 = \frac{1}{2}\int d^3r'\,\rho(\underline{r}')(r')^2(3\cos^2\theta - 1)$

$$= \frac{1}{2}\int d^3r'\,\rho(\underline{r}')\Big(3\underbrace{\frac{\underline{r}'\cdot\underline{r}}{r}\,\frac{\underline{r}'\cdot\underline{r}}{r}}_{\frac{x'_k x_k\, x'_\ell x_\ell}{r^2}} - r'^2\Big)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2r^2}\underbrace{\int d^3r'\,\rho(\underline{r}')(3x'_k x'_\ell - r'^2\delta_{k\ell})}_{Q_{k\ell}\ \text{Quadrupolmoment}}\,x_k x_\ell$$

(spurfreier, symm. Tensor: $\sum_{i=1}^{3} Q_{ii} = \int d^3r'\,\rho(r')(3(r')^2 - 3(r')^2) = 0$)

es ex. orthogonale Koord.trafo auf Diagonalform: $Q_{k\ell} = 0 \quad (k \neq \ell)$

$Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$

$\Rightarrow$ nur 2 unabh. Komp.

$$\phi^{(2)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{2r^5}\,Q_{k\ell}x_k x_\ell = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\underline{r}\,\underline{\underline{Q}}\,\underline{r}}{2r^5} \sim \frac{1}{r^3}$$

Beispiel : 2 entgegengerichtete Dipole :

1.5. Elektrostat. Feldenergie

Kraft $\underline{F}(\underline{r}) = q\underline{E}(\underline{r}) = -q\underline{\nabla}\phi(\underline{r})$

$\Rightarrow$ $V(\underline{r}) = q\phi(\underline{r})$ ist pot. Energie einer Ladung q im Feld $\underline{E}(\underline{r})$

$$W_{ij} = q_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} = W_{ji}$$ pot. Energie

der Ladung q_i bei $\underline{r}_i$ im Pot. der Ladung q_j bei $\underline{r}_j$,

Gesamte pot. Energie eines Systems von Ladungen $q_1 \cdots q_N$:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} W_{ij} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$$

Kontinuierl. Ladungsverteilung $\rho(\underline{r})$

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\rho(\underline{r})\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int d^3r \, \phi(\underline{r}) \rho(\underline{r})}$$

$\rho(\underline{r}) = \varepsilon_0 \underline{\nabla} \cdot \underline{E} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \, \phi(\underline{r}) \underline{\nabla} \cdot \underline{E}$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \Big\{ \underbrace{\int d^3r \, \underline{\nabla}(\phi \underline{E})}_{\text{Gauß}} - \int d^3r (\underline{\nabla}\phi) \underline{E}(\underline{r}) \Big\}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \Big\{ \underbrace{\int_{S_\infty} d\underline{f} \, (\phi \underline{E})}_{0} + \int d^3r (\underline{E}(\underline{r}))^2 \Big\}$$

$\phi \sim r^{-1}$, $\underline{E} \sim r^{-2}$, $r \to \infty$

$$= \int d^3r \, w(\underline{r})$$

Energiedichte des el. Feldes $\boxed{w(\underline{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} (\underline{E}(\underline{r}))^2}$

Selbstenergie einer Pkt. Ladung

$$|\underline{E}(\underline{r})| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad w(r) = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r^4}$$

Gesamtenergie $W = \int d^3r\, w(r) = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 4\pi \underbrace{\int_0^\infty dr\, r^2 \frac{1}{r^4}}$

$\frac{1}{r}(r=0) \to \infty$

Begriff der Pkt. Ladung ist im Widerspruch zum feldtheoret. Begriff der Energiedichte !