6.1 Leiter in der Elektrostatik

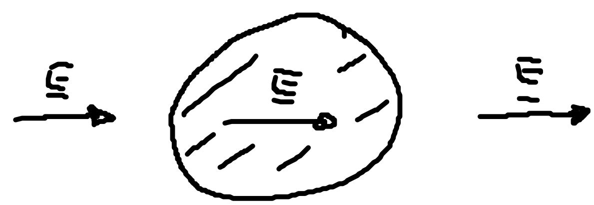
Elektrische Leiter = Materie mit quasi-frei bewegliche elektr. Ladungen.

El. Feld $\underline{E}(\underline{r})$ im Innern eines Leiters $\rightarrow$ Kraft $\underline{F} = q\underline{E}$

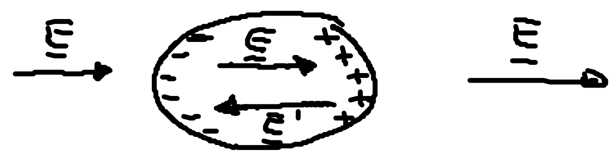
Ladungen werden verschoben

$\Rightarrow$ kompensierendes Gegenfeld $\underline{E}'$, bis $\underline{F}=0$, d.h. $\underline{E}'-\underline{E}=0$

Anfang



Endzeit.

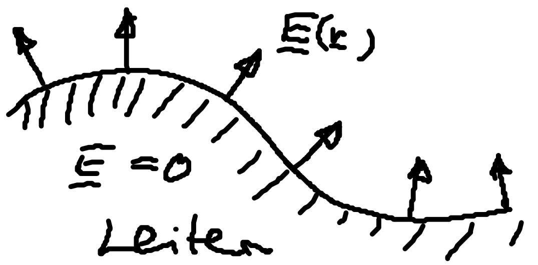


$\Rightarrow$ $\underline{E}^{res}(\underline{r}) = 0$ im Innern des Leiters

$$\underline{E}^{res}(\underline{r}) - \underline{\nabla}\phi(\underline{r}) = 0 \Rightarrow \phi(\underline{r}) = \text{const.} \text{ im Innern}$$

$\Rightarrow$ Leiteroberfl. ist Äquipotenzialfläche

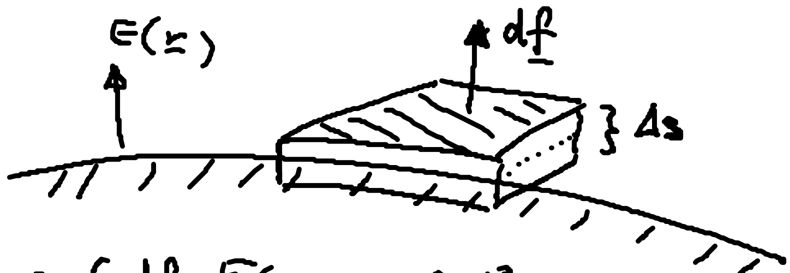
Vakuum



$\underline{E}(\underline{r}) \perp \phi(\underline{r}) = \text{const}$ (Leiteroberfläche)

$\underline{E} = 0 \implies \rho(\underline{r}) = 0$

<u>Flächenladungsdichte</u> auf Leiteroberflächen:



$$\epsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r \, \rho(\underline{r})$$

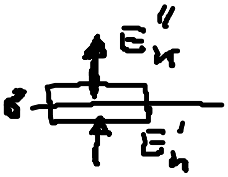
$V = df \cdot \Delta s$ mit $df \to 0$, $\Delta s \to 0$:

$$\oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) \longrightarrow df \underbrace{\underline{n}\,\underline{E}}_{E} \qquad (\underline{n} \parallel \underline{E}) \quad \underline{n} \text{ Normalenvektor}$$

$$\int_V d^3r \, \rho(\underline{r}) \longrightarrow df \underbrace{\rho(r)\Delta s}_{\sigma(\underline{r}) \text{ Flächenladungsdichte}}$$

$$\implies \boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\underline{r})\, \underline{n}} \quad \text{auf Leiteroberfläche}$$

Allg. gilt für Flächenladungen:

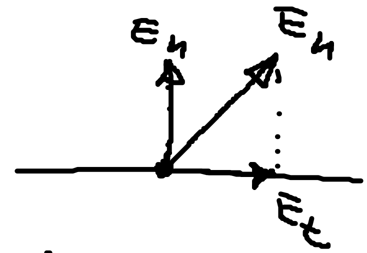


$$\underbrace{E_n'' - E_n'}_{\text{„Flächendivergenz"}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\underline{r})$$

Volumendivergenz

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r})$$

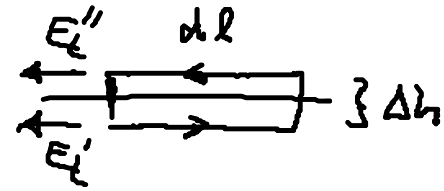
= Sprung des Normalkomp.
von $\underline{E}$ beim Durchgang
durch geladener Fläche



Tangenzialkomp. von $\underline{E}$ ist stetig
beim Durchgang durch geladene Fläche

Beweis:

$$\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} = \int_F \underline{\nabla} \times \underline{E}\, d\underline{f} = 0$$



$F = dl \cdot \Delta h$ mit $dl \to 0$, $\Delta h \to 0$

$$(E_t'' - E_t')\, dl = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} E_t'' - E_t' &= 0 \\ E_n'' - E_n' &= \frac{1}{\epsilon_0}\sigma(\underline{r}) \end{aligned}}$$

Randwertaufgabe der Elektrostatik mit Leitern

1. Grundaufgabe:

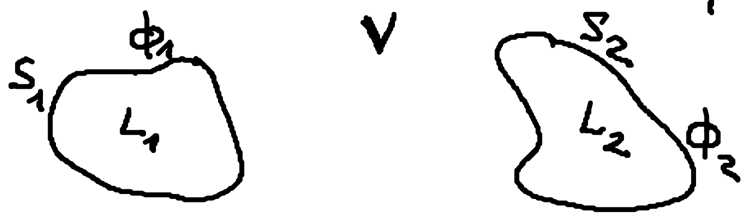
geg.: Leiter L_α (Oberflächen S_α), $\alpha = 1, \dots, n$
mit Pot. ϕ_α;
Raumladungsdichte im Außenraum V

gesucht: $\phi(\underline{r})$ als Lösung von $\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\varrho(\underline{r})$

zu den Randbed. $\phi(\underline{r})\Big|_{S_\alpha} = \phi_\alpha$

$$\phi(\underline{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

sowie Gesamtladungen Q_α auf den Leitern
(Dirichlet'sches Randwertproblem)



<u>Lösung</u>:

$$(*)\quad \boxed{\phi(\underline{r}) = \int_V d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\varrho(\underline{r}') + \epsilon_0 \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha \int_{S_\alpha} d\underline{f}' \cdot \underline{\nabla}_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')}$$

wobei die Green'sche Fkt. $G(\underline{r}-\underline{r}')$ die Lösung von $\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$ zu den Randbed.

$$G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\substack{\underline{r}\in S_\alpha \\ \underline{r}'\in}} = 0 \quad , \quad G(\underline{r}-\underline{r}') \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

<u>Beweis</u>:

Aus dem Gauß'schen Satz

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{v} = \int_V d^3r\, \mathrm{div}\, \underline{v}$$

folgt mit $\underline{v} = \psi\underline{\nabla}\varphi$

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\, \psi \underline{\nabla}\varphi = \int_V d^3r\, (\psi \Delta\varphi + \underline{\nabla}\psi \underline{\nabla}\varphi)$$

bzw. mit $\underline{v} = \varphi \underline{\nabla}\psi$

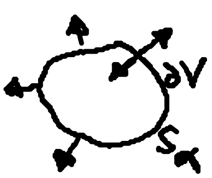
$$\int_{\partial V} d\underline{f}\, \varphi\underline{\nabla}\psi = \int_V d^3r\,(\varphi\Delta\psi + \underline{\nabla}\psi\, \underline{\nabla}\varphi)$$

$\Rightarrow$ <u>Green'scher Satz</u>:

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\, (\varphi\underline{\nabla}\psi - \psi\underline{\nabla}\varphi) = \int_V d^3r\,(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)$$

Setze $\psi(\underline{r}) := G(\underline{r}-\underline{r}')$, $\varphi(\underline{r}) := \phi(\underline{r})$, $\partial V = \bigcup_{\alpha=1}^{n} S_\alpha$

(i) zeige: $\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \Rightarrow \phi(\underline{r}) = \circledast$



$$\int_{\partial V} d\underline{f}\, \phi(\underline{r})\underline{\nabla}_r G(\underline{r}-\underline{r}') - \underbrace{\int_{\partial V} d\underline{f}\, G(\underline{r}-\underline{r}')\underline{\nabla}\phi}_{=0 \text{ wegen } G|_{r\in S_\alpha}=0} = -\frac{1}{\epsilon_0}\Big[\underbrace{\int_V d^3r\, \phi(r)\delta(\underline{r}-\underline{r}')}_{\phi(\underline{r}')} - \int d^3r\, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r})\Big]$$

$\partial V \downarrow$ Vorzeichenwechsel! $\bigcup_{\alpha=1}^{n} S_\alpha$

$$\Rightarrow \phi(r') = \int_V d^3r\, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r}) + \epsilon_0 \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}_r G(\underline{r}-\underline{r}')$$

(ii) zeige: $\phi(\underline{r}) = \circledast \Rightarrow \Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$ im Innern von V

$\phi|_{S_\alpha} = \phi_\alpha$ Randbed. erfüllt

$$\Delta_{r'}\phi(\underline{r}') = \int_V d^3r\, \underbrace{\Delta_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')}\rho(\underline{r}) + \underbrace{\epsilon_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \oint d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}_r \underbrace{\Delta_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')}_{\underbrace{-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')}_{0,\text{ da } \underline{r}\in S_\alpha,\ \underline{r}'\in V-\partial V}}}_{0}$$

$$= -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r}')$$

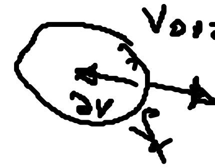
Lös. der <u>inhom</u>. Poissongl. zu <u>homog</u>. Randbed.

Lös. der <u>homog</u>. Poissongl. zu inhom. Randbed.

$$\phi\big|_{S_\alpha} = \phi_\alpha \quad !$$

$$\phi(\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta} = \underbrace{\int_V d^3r\, G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}\, \rho(\underline{r})}_{0} + \epsilon_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}_r G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}$$

Vorzeichen!



$$= -\epsilon_0 \int_{\partial V} d\underline{f}\; \phi(\underline{r})\, \underline{\nabla}_r\, G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}$$

Green'scher Satz

$$= -\epsilon_0 \Big[\underbrace{\int_{\partial V} d\underline{f}\; G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}\nabla_r\phi}_{0} + \underbrace{\int_V d^3r\,\big(\phi\, \underbrace{\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')}}_{-\frac{1}{\epsilon_0}\phi(\underline{r}')\big|_{\underline{r}'\in S_\beta}} - \underbrace{G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}\Delta\phi}_{0}\big)\Big]$$

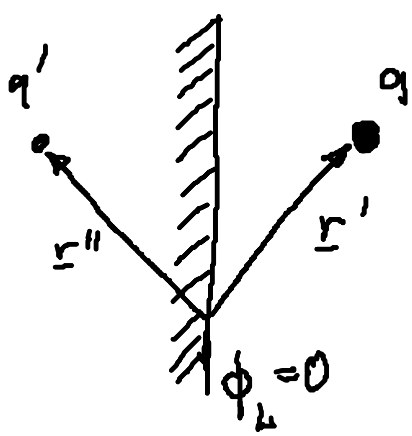
$$= \phi_\beta \qquad \square$$

<u>Ladung</u>: $Q_\alpha = \oint_{S_\alpha} df\,\sigma = \epsilon_0 \oint_{S_\alpha} \underbrace{df\,\underline{n}}_{d\underline{f}}\,\underline{E} = -\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}\phi$

Konstruktion der Green'schen Fkt.

für Leiteroberflächen mit hoher Symmetrie:

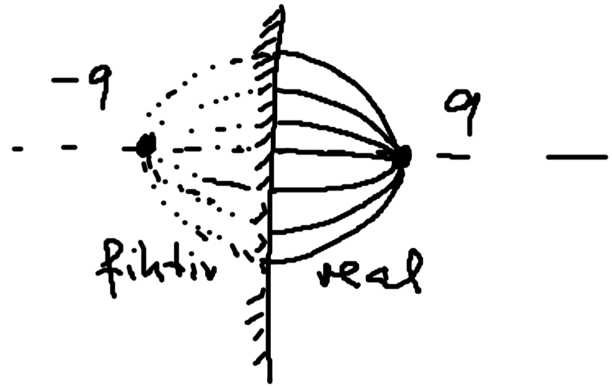
<u>Methode der Bildladungen</u> (Spiegelladungen) Üs



Wähle fiktive Bildladung q' bei $\underline{r}''$ im Leiter, so dass Pot. beider Ladungen auf Leiteroberfl. verschwindet:

$q' = -q$

$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} - \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}''|}\right)$$



−q
q
fiktiv
real