6.1 Leiter in der Elektrostatik

Elektrische Leiter = Materie mit quasi-frei beweglichen elektr. Ladungen.

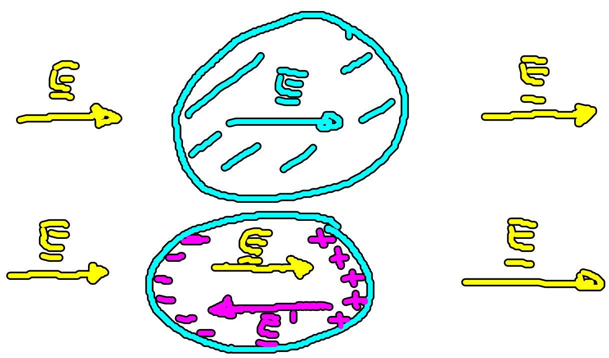
El. Feld $\underline{E}(\underline{r})$ im Innern eines Leiters $\to$ Kraft $\underline{F}=q\underline{E}$

Ladungen werden verschoben

$\Rightarrow$ kompensierendes Gegenfeld $\underline{E}'$, bis $\underline{F}=0$, d.h. $\underline{E}'-\underline{E}=0$

Anfang

Endzeit.



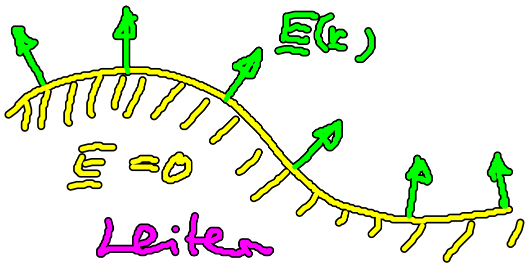
$\Rightarrow$ $\underline{E}^{ges}(\underline{r})=0$ im Innern des Leiters

$$\underline{E}^{ges}(\underline{r}) - \underline{\nabla}\Phi(\underline{r})=0 \Rightarrow \Phi(\underline{r})=\text{const.}$$

im Innern

$\Rightarrow$ Leiteroberfl. ist Äquipotenzialfläche

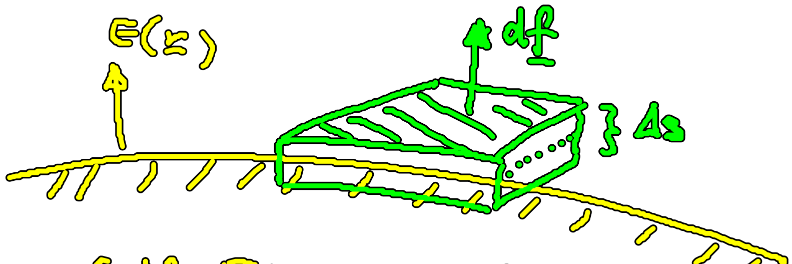
Vakuum



$\underline{E}(\underline{r}) \perp \phi(\underline{r}) = \text{const}$ (Leiteroberfläche)

$\underline{E}=0 \Rightarrow \rho(\underline{r})=0$

Flächenladungsdichte auf Leiteroberflächen:



Leiter

$$\epsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r\, \rho(\underline{r})$$

$V = df \cdot \Delta s$ mit $df \to 0$, $\Delta s \to 0$:

$$\oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) \longrightarrow df\, \underbrace{\underline{n}\,\underline{E}}_{E}$$

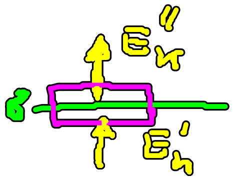
($\underline{n} \parallel \underline{E}$)
$\underline{n}$ Normalenvektor

$$\int_V d^3r\, \rho(\underline{r}) \longrightarrow df\, \underbrace{\rho(\underline{r})\Delta s}_{\sigma(\underline{r})}$$

$\sigma(\underline{r})$ Flächenladungsdichte

$$\Longrightarrow \boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma(\underline{r})\,\underline{n}}$$ auf Leiteroberfläche

Allg. gilt für Flächenladungen σ:

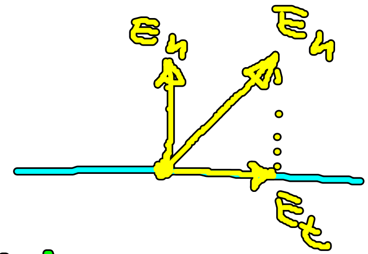


$$\underbrace{E_n'' - E_n'}_{\text{„Flächendivergenz"}} = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma(\underline{r})$$

Volumendivergenz

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})$$

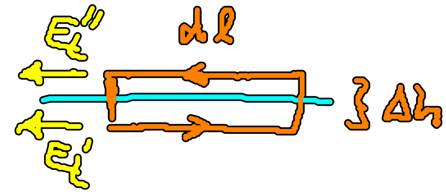
= Sprung der Normalkomp. von $\underline{E}$ beim Durchgang durch geladene Fläche



Tangenzialkomp. von $\underline{E}$ ist stetig beim Durchgang durch geladene Fläche

Beweis:

$$\oint_{\partial F} \underline{E}\cdot d\underline{s} = \int_F \underline{\nabla}\times\underline{E}\, d\underline{f} = 0$$



$F = dl\cdot\Delta h$ mit $dl\to 0$, $\Delta h \to 0$

$$(E_t'' - E_t')\,dl = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} E_t'' - E_t' &= 0 \\ E_n'' - E_n' &= \frac{1}{\epsilon_0}\sigma(\underline{r}) \end{aligned}}$$

Randwertaufgabe der Elektrostatik mit Leitern

1. Grundaufgabe:

geg.: Leiter L_α (Oberflächen S_α), $\alpha = 1, \dots, n$
mit Pot. Φ_α;
Raumladungsdichte im Außenraum V

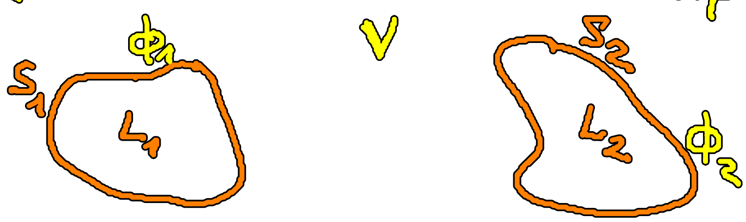
gesucht: $\phi(\underline{r})$ als Lösung von $\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})$

zu den Randbed. $\phi(\underline{r})\Big|_{S_\alpha} = \phi_\alpha$

$$\phi(\underline{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

sowie Gesamtladungen Q_α auf den Leitern

(Dirichlet'sches Randwertproblem)



<u>Lösung</u>:

$$(*) \quad \boxed{\phi(\underline{r}) = \int_V d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r}') + \epsilon_0 \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha \int_{S_\alpha} d\underline{f}' \cdot \underline{\nabla}_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')}$$

wobei die Green'sche Fkt. $G(\underline{r}-\underline{r}')$ die Lösung von $\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$ zu den Randbed.

$$G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\substack{\underline{r}\in S_\alpha \\ \underline{r}'\in}} = 0 \quad , \quad G(\underline{r}-\underline{r}') \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

<u>Beweis</u>:

Aus dem Gauß'schen Satz

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{v} = \int_V d^3r\, \mathrm{div}\, \underline{v}$$

folgt mit $\underline{v} = \psi\underline{\nabla}\varphi$

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\, \psi\, \underline{\nabla}\varphi = \int_V d^3r\,\left(\psi\,\Delta\varphi + \underline{\nabla}\psi\,\underline{\nabla}\varphi\right)$$

bzw. mit $\underline{v} = \varphi\,\underline{\nabla}\psi$

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\, \varphi\, \underline{\nabla}\psi = \int_V d^3r\,\left(\varphi\,\Delta\psi + \underline{\nabla}\psi\,\underline{\nabla}\varphi\right)$$

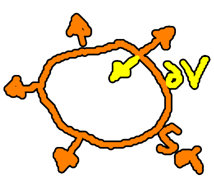
$\Rightarrow$ Green'scher Satz:

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\,\left(\varphi\,\underline{\nabla}\psi - \psi\,\underline{\nabla}\varphi\right) = \int_V d^3r\,\left(\varphi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\varphi\right)$$

Setze $\psi(\underline{r}) := G(\underline{r}-\underline{r}')$, $\varphi(\underline{r}) := \phi(\underline{r})$, $\partial V = \bigcup_{\alpha=1}^{n} S_\alpha$

(i) zeige: $\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \to \phi(\underline{r}) = ⊛$

$\Downarrow$



$$\int_{\partial V} d\underline{f}\,\phi(\underline{r})\,\underline{\nabla}_r G(\underline{r}-\underline{r}') - \underbrace{\int_{\partial V} d\underline{f}\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\underline{\nabla}\phi}_{=0 \text{ wegen } G|_{r\in S_\alpha}=0} = -\frac{1}{\epsilon_0}\Big[\underbrace{\int_V d^3r\,\phi(r)\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')}_{\phi(\underline{r}')} - \int d^3r\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r})\Big]$$

$\partial V \downarrow$ Vorzeichenwechsel! $\bigcup_{\alpha=1}^{n} S_\alpha$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}') = \int_V d^3r\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r}) + \epsilon_0 \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}_r G(\underline{r}-\underline{r}')$$

(ii) zeige: $\phi(\underline{r}) = ⊛ \Longrightarrow \Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$ im Innern von V

$\phi|_{S_\alpha} = \phi_\alpha$ Randbed. erfüllt

$$\Delta_{r'}\phi(\underline{r}') = \int_V d^3r\, \underbrace{\Delta_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')}\,\rho(\underline{r}) + \underbrace{\epsilon_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \oint d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}_r \underbrace{\Delta_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')}_{\underbrace{-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')}_{0,\ \text{da } r\in S_\alpha,\ r'\in V-\partial V}}}_{0}$$

$$= -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r}')$$

Lös. der inhom. Poissongl. zu homog. Randbed.

Lös. der homog. Poissongl. zu inhom. Randbed.

$\phi\big|_{S_\alpha} = \phi_\alpha$ ...... !

$$\phi(\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta} = \underbrace{\int_V d^3r\, G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}\, \rho(\underline{r})}_{0} + \epsilon_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\nabla_r G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}$$

$$= -\epsilon_0 \int_{\partial V} d\underline{f}\, \phi(\underline{r})\, \nabla_r G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}$$

Green'scher Satz

$$= -\epsilon_0 \Big[\underbrace{\int_{\partial V} d\underline{f}\, G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta} \nabla_r \phi}_{0} + \underbrace{\int_V d^3r \Big(\phi \underbrace{\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')}}_{-\frac{1}{\epsilon_0}\phi(\underline{r}')\big|_{\underline{r}'\in S_\beta}} - \underbrace{G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta} \Delta\phi\Big)}_{0} \Big]$$

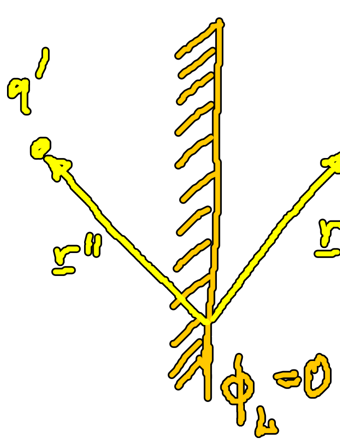
$= \phi_\beta$ $\square$

Ladung: $Q_\alpha = \oint_{S_\alpha} df\, \sigma = \epsilon_0 \oint_{S_\alpha} \underbrace{df\, \underline{n}}_{d\underline{f}}\, \underline{E} = -\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\nabla\phi$

Konstruktion der Green'schen Fkt.

für Leiteroberflächen mit hoher Symmetrie:

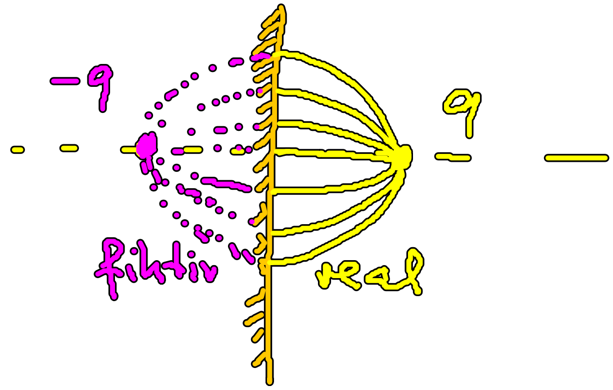
Methode der Bildladungen (Spiegelladungen) Üs



Wähle fiktive Bildladung q' bei $\underline{r}''$ im Leiter, so dass Pot. beider Ladungen auf Leiteroberfl. verschwindet:

$q' = -q$

$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} - \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}''|}\right)$$


-q
q
fiktiv
real