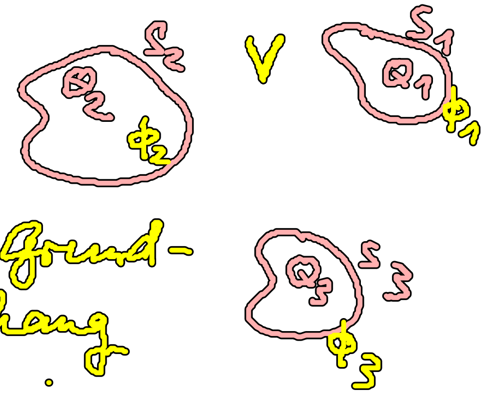
2. Grundaufgabe der Elektrostatik :

geg.: Leiter L_α (Oberfläche S_α), $\alpha = 1, \dots, n$
mit Ladungen Q_α
Raumlad. dichte $\rho(\underline{r})$ in V



gesucht: $\Phi(\underline{r})$, Φ_α

Lösung: Zurückführen auf 1. Grundaufgabe durch Zus.hang zwischen Q_α und Φ_α:

$$\boxed{Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta}\Phi_\beta} \qquad \alpha = 1, \dots, n$$

mit Kapazitätskoeffizienten $C_{\alpha\beta}$

Beweis: $$Q_\alpha = -\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\, \underline{\nabla}\Phi$$

Lösung Φ

$$= -\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}_r \int_V d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r}')$$

$$-\epsilon_0^2 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}_r \sum_\beta \Phi_\beta \oint_{S_\beta} d\underline{f}'\cdot\underline{\nabla}_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')$$

$$= -\varepsilon_0 \int_{L_\alpha} d^3r \int_V d^3r' \underbrace{\Delta_r G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}_{-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = 0 \text{ für } \mathbf{r}\in L_\alpha,\ \mathbf{r}'\in V} \rho(\mathbf{r}')$$

$$- \sum_{\beta=1}^{n} \phi_\beta \underbrace{\varepsilon_0^2 \oint_{S_\alpha} d\mathbf{f}\cdot\nabla_r \oint_{S_\beta} d\mathbf{f}'\cdot\nabla_{r'} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}_{=: -C_{\alpha\beta}}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta}\phi_\beta$$

Aus der Symm. $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}'-\mathbf{r})$ folgt

$$\boxed{C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}}$$

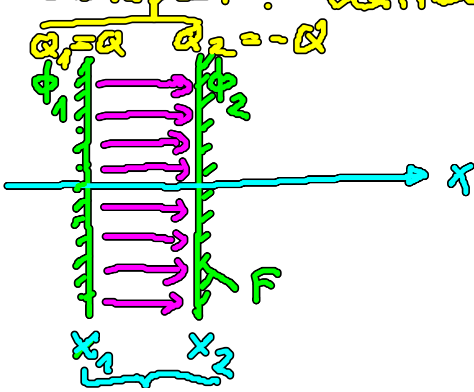
Einheit der Kapazität: $1\,F = 1\frac{C}{V} = 1$ Farad

(M. Faraday 1791–1867)

Betrachte speziell einen einzelnen Leiter mit Pot. ϕ_L:

$$C = \frac{Q}{\phi_L} \quad \text{(Selbst-)}\underline{\text{Kapazität des Leiters}}$$

Beispiel: Plattenkondensator



$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2 \\ Q_2 &= C_{21}\phi_1 + C_{22}\phi_2 \end{aligned}\right\} C_{12} = C_{21} \equiv C'$$

Symm. $1 \leftrightarrow 2 \Rightarrow C_{11} = C_{22} \equiv C$

Spezialfall $Q_1 + Q_2 = 0$

E-Feld:

$\sigma = \frac{Q}{F} = \varepsilon_0 E = \text{const.}$ (2)

$\Rightarrow \phi(x) = -Ex + \phi_0$

$\Rightarrow \phi_1 - \phi_2 = E\underbrace{(x_2 - x_1)}_{a}$ (3)

(1),(2),(3)
$\Rightarrow$ $\boxed{C = -C' = \frac{Q}{Ea} = \varepsilon_0 \frac{F}{a}}$

$\Rightarrow Q = C\phi_1 + C'\phi_2$
$-Q = C'\phi_1 + C\phi_2$

$0 = (C+C')(\phi_1+\phi_2) \Rightarrow C = -C'$

$C = -C' = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2}$ (1)

Betrachte Lösung der 2. Grundaufgabe:
Inverse der Kapazitätsmatrix

$\boxed{\phi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} (C^{-1})_{\alpha\beta} Q_\beta}$ $\quad \neq \sum_\beta \frac{1}{C_{\alpha\beta}} Q_\beta$

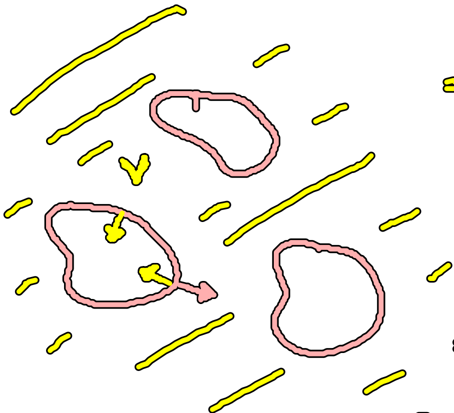
eingesetzt in die Lösung der 1. Grundaufgabe liefert $\phi(\underline{r})$ für geg. Q_β, $\rho(\underline{r})$. ☐

Energie des Feldes im Außenraum V (für $\rho(\underline{r}) = 0$)

$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V d^3r \, (\underline{E}(\underline{r}))^2$

differenzielle Änderung der Randbed. auf den L_α $\Big\}$
$Q_\alpha \to Q_\alpha + \delta Q_\alpha$
$\phi_\alpha \to \phi_\alpha + \delta\phi_\alpha$
Lösung $\phi(\underline{r}) \to \phi(\underline{r}) + \delta\phi(\underline{r})$

Räuml. Anordnung ungeändert $\Rightarrow$ Vertauschung von $\underline{\nabla}$ und δ



$$\Rightarrow \quad \delta W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V d^3r \; 2\,\underbrace{\underline{E}(\underline{r})}_{-\nabla\phi}\,\delta\underline{E}(\underline{r})$$

$$= -\varepsilon_0 \int_V d^3r \; \underbrace{\left(\underline{\nabla}\phi(\underline{r})\right)\delta\underline{E}(\underline{r})}_{\underline{\nabla}(\phi\,\delta\underline{E}) - \phi\,\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\delta\underline{E}}_{\delta\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = 0 \text{ in } V\,(\rho=0)}}$$

$$= -\varepsilon_0 \int_V d^3r \; \underline{\nabla}\,(\phi\,\delta\underline{E})$$

$$\underset{\partial V \to S_\alpha}{\overset{\text{gauß}}{=}} \varepsilon_0 \sum_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\,\left(\phi(\underline{r})\,\delta\underline{E}(\underline{r})\right)$$

$$\underset{\phi(\underline{r})|_{S_\alpha} = \phi_\alpha}{=} \varepsilon_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\delta\underline{E}$$

$$= \sum_\alpha \phi_\alpha\,\delta Q_\alpha \qquad\qquad Q_\alpha = \sum_\beta C_{\alpha\beta}\,\phi_\beta$$

$$= \sum_{\alpha\beta} \phi_\alpha\, C_{\alpha\beta}\,\delta\phi_\beta$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\,\phi_\alpha\,\delta\phi_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} \underset{C_{\alpha\beta}}{\underset{\parallel}{C_{\beta\alpha}}}\,\phi_\beta\,\delta\phi_\alpha$$

$$= \delta\left\{\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\,\phi_\alpha\,\phi_\beta\right\}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\,\phi_\alpha\,\phi_\beta} \qquad \underline{\text{Feldenergie}}$$

2. Stationäre Ströme und Magnetfeld

2.1 Kontinuitätsgleichung

Bewegte Ladungen $\longrightarrow$ el. Strom $I = \frac{dQ}{dt}$

Experimentelle Erfahrung: Erhaltung der el. Ladung

$$Q(t) = \int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t)$$

$\Rightarrow$ globaler Erhaltungssatz

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t) = -\oint_{\partial V} \delta I$$

$dV = |d\underline{f}|\,|\underline{v}|\,dt\cos\alpha$

$$\delta I = \rho\frac{dV}{dt} = \frac{\rho\,|\underline{v}|\,dt\,|d\underline{f}|\cos\alpha}{dt} = \rho\,\underline{v}\cdot d\underline{f}$$

(Ladung, die durch $d\underline{f}$ pro Zeit aus V herausströmt)

Elektr. Stromdichte $\underline{j}(\underline{r},t) := \rho(\underline{r},t)\,\underline{v}(\underline{r},t)$ (lokale Größe)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t) = -\oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{j}(\underline{r},t) = -\int_V d^3r\, \operatorname{div}\underline{j} \quad \text{für bel. } V$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \operatorname{div}\underline{j}(\underline{r},t) = 0}$$

Kontinuitätsgl.

lokaler Erhaltungssatz

speziell: stationäre Ladungsverteilung $\Rightarrow \operatorname{div}\underline{j} = 0$

(nicht notwendig $\underline{j} = 0$!)

$\Rightarrow$ quellenfreie Stromdichte

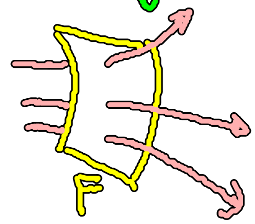
* allg. Struktur einer Kontinuitätsgl. (lokaler Erhalt.satz)

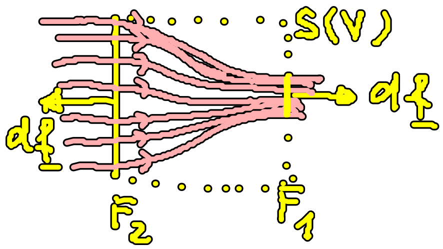
z.B.: Masse, Energie (ohne Dissipation), Impuls, Wahrscheinlichkeit (QM)

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}\underline{j} = 0, \quad \underline{j} = \rho\,\underline{v}$$

Betrachte stat. Ladungsverteilung: $\operatorname{div}\underline{j}=0$

Strom $I = \int_F \underline{j}\, d\underline{f}$



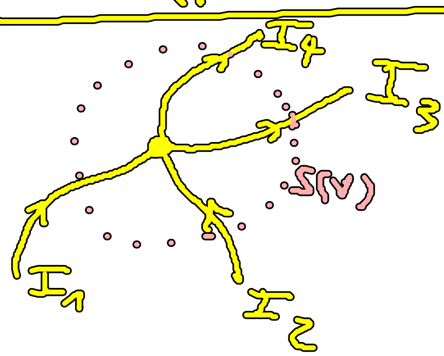


$$0 = \int_V d^3r\, \operatorname{div}\underline{j} = \oint_{S(V)} \underline{j}\cdot d\underline{f} = \int_{F_1}\underline{j}\cdot d\underline{f} + \int_{F_2}\underline{j}\, d\underline{f}$$

$$= I_1 - I_2$$

$\Rightarrow I_1 = I_2$ Strom konstant

Kirchhoff'sche Knotenregel:



$$0 = \int d^3r\, \operatorname{div}\underline{j} = \oint_{S(V)} d\underline{f}\cdot\underline{j}$$

$$= -I_1 - I_2 + I_3 + I_4$$

$$\boxed{\sum I_{in} = \sum I_{out}}$$

Ohm'sches Gesetz

Exp. Erfahrung: $U \sim I$ in Leitern bei nicht zu hohen Spannungen.

$U = RI$ mit el. Widerstand R

lokale Form des Ohm'schen Gesetzes:

$$\boxed{\underline{j}(\underline{r},t) = \sigma\, \underline{E}(\underline{r},t)}$$ el. Leitfähigk. $\sigma = \text{const.}$

(Drude)

Energiedissipation:

a) El. Arbeit im el. Feld: $dW = \underline{F}\cdot d\underline{s} = q\,\underline{E}\cdot d\underline{s}$

el. Leistung: $\frac{dW}{dt} = q\,\underline{E}\cdot\underline{v}$

b) kontin. Ladungsverteil. $\rho(\underline{r})$

El. Leistung am Volumenelement d^3r: $dP = \underbrace{\underline{E}(\underline{r})\,\underline{j}(\underline{r})}_{\text{Leistungsdichte}}\,d^3r$

$$P = \int_V \underline{j}(\underline{r}) \cdot \underline{E}(\underline{r})\, d^3r$$

globale Bilanz: im Feld aufgenommene Leistung $\overset{!}{=}$ durch Stoßprozesse an das Kristallgitter dissipierte Leistung (= Joule'sche Wärme)

Ohm: $\underline{E} \cdot \underline{j} = \sigma \underline{E}^2$

gesamte Verlustleistung: $P = \int \underline{j} \cdot \underline{E}\, d^3r = IU = RI^2$