## 2.2. Magnetische Induktion

Experimentelle Erfahrung: WW zwischen bewegten Ladungen:

Kraft auf Ladung $q$, die sich mit $\underline{v}$ bewegt:

$$\boxed{\underline{F} = q\,\underline{v} \times \underline{B}(\underline{r})}$$ Lorentz-Kraft

$\underline{B}(\underline{r})$: magnetische Induktion am Ort $\underline{r}$, erzeugt von anderen bewegten Ladungen mit Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}') = \rho(\underline{r}')\,\underline{v}$

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$ Ampère-Gesetz

( Analog zur Coulomb-WW in der Elektrostatik: $\underline{F} = q\,\underline{E}(\underline{r})$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r'\, \rho(\underline{r}')\, \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$ )

<u>Einheiten</u> (SI): $[B] = 1\,\frac{Ns}{Cm} = 1 \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{kg}\,m^2}{C\,s^2}}_{=V} \frac{s}{m^2} = 1\,T = 1$ Tesla

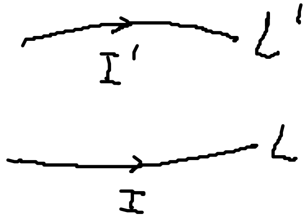
Damit ist $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}\,\frac{Vs}{Am}$ festgelegt (nicht wie $\varepsilon_0$ frei wählbar)

(Die magnet. Induktion beschreibt keine neue, von der Coulomb-WW unabhängige WW: Betrachte Transformation auf lokales Ruhesystem einer bewegten Ladung!)

<u>Gauß-System</u>: $[B] = \frac{dyn}{ESE} = \frac{\sqrt{dyn}}{cm} = 1\,G = 1$ Gauß

(ESU: Electrostatic unit)

## Kraft zwischen 2 stromdurchflossenen Leitern




Betrachte 2 dünne Leiter $L, L'$ mit zeitl. konstanten Strömen $I, I'$

Strom durch $L'$: $\underline{j}\, d^3r' = \rho\, d^3r' \underbrace{\underline{v}'}_{\frac{d\underline{r}'}{dt}} = \underbrace{\rho \frac{d^3r'}{dt}}_{I'} d\underline{r}' = I' d\underline{r}'$

$\Rightarrow$ magnet. Induktion $\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$

Kraft auf Ladung im Volumenelement $d^3r$ von $L$:

$$d\underline{F} = \overbrace{\rho \underline{v}}^{\underline{j}} \times \underline{B}\, d^3r = \underline{j} \times \underline{B}\, d^3r = I\, d\underline{r} \times \underline{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \int_L d\underline{r} \times \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$

Kraft von $L'$ auf $L$

(bac − cab)

mit $d\underline{r} \times (d\underline{r}' \times (\underline{r}-\underline{r}')) = (d\underline{r}\,(\underline{r}-\underline{r}'))\, d\underline{r}' - (d\underline{r}\, d\underline{r}')(\underline{r}-\underline{r}')$

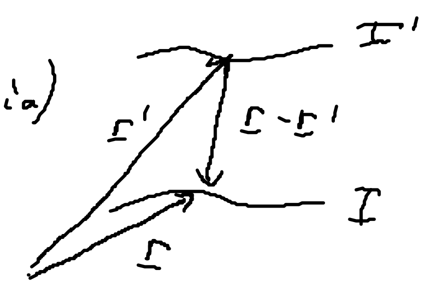
und $\int_L d\underline{r} \cdot \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = -\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\Bigg|_{L\text{-Anfang}}^{L\text{-Ende}} = 0$ ($L$ geschlossen oder $L$-Enden im $\infty$)

folgt
$$\boxed{\underline{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I I' \iint_{L\,L'} (d\underline{r}\, d\underline{r}') \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$

$\Rightarrow$ für parallele Ströme ($I\, d\underline{r}\; I' d\underline{r}' > 0$) Anziehung

antiparallele Ströme ($I\, d\underline{r}\; I' d\underline{r}' < 0$) Abstoßung

$$\left.\begin{array}{l} \underline{r} \leftrightarrow \underline{r}' \\ d\underline{r} \leftrightarrow d\underline{r}' \\ I \leftrightarrow I' \end{array}\right\} \quad \underline{F} \leftrightarrow -\underline{F} \quad (\text{actio} = \text{reactio})$$



## 2.3 Magnetostatische Feldgleichungen

(gilt auch in quasistat. Näherung: zeitliche Änderung << räumliche Änderung)

Mit dem Vektorpotenzial

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

(nicht eindeutig!)
Umeichung möglich
$\underline{A} \to \underline{A} + \underline{\nabla}\varphi$
mit bel. $\varphi(\underline{r},t)$,
$\underline{\nabla} \times \underline{\nabla}\varphi \equiv 0$

läßt sich

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \operatorname{rot} \underline{A}(\underline{r}) = \underline{\nabla} \times \underline{A}(\underline{r})}$$

schreiben.

__Beweis__: $\underline{\nabla} \times \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \underbrace{\left(\underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)}_{-\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}} \times \underline{j}(\underline{r}')$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = \underline{B}$$

Folgendes ist äquivalent:

(i) $\underline{B}(\underline{r}) = \operatorname{rot} \underline{A}$ hat Vektorpotenzial

$\Updownarrow$

(ii) $\boxed{\operatorname{div} \underline{B} = 0}$ $\qquad (\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{A}) \equiv 0)$

$\Updownarrow$ Es gibt keine Quellen der magnet. Induktion („magn. Ladungen")

$$\oint_{\partial V} \underline{B} \cdot d\underline{f} = 0$$

__Aber__: „__Magnetische Monopole__" postuliert von Dirac ($\sim 1930$)
zur Erklärung der Quantelung der Ladung.
Umstritten: Exp. Nachweis (?) durch supraleitende Spule 1982
[Spektrum der Wiss.: Juni 1982, p. 78]

Zusammenhang zwischen $\underline{B}$ und $\underline{j}$:
(auch nichtstationär)

$$\text{rot}\,\underline{B} = \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A}) = \underline{\nabla}\,\underbrace{(\underline{\nabla} \cdot \underline{A})}_{(*)} - \Delta \underline{A}$$

$$(*)\quad \underline{\nabla} \cdot \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r'\, \underline{\nabla}_r \cdot \left( \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \cdot \underbrace{\underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-\underline{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \left[ \underbrace{-\underline{\nabla}_{r'} \cdot \left( \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right)}_{\text{Gauß'scher Satz}} + \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underbrace{\underline{\nabla}_{r'} \cdot \underline{j}(\underline{r}')}_{-\frac{\partial}{\partial t} \rho} \right]$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\int_{S(r\to\infty)} d\underline{f}' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\substack{0 \text{ für hinreichend} \\ \text{rasch abklingende } \underline{j}(\underline{r}')}} - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}', t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\mu_0 \varepsilon_0 \phi(\underline{r}, t)}$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{A}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \phi(\underline{r}, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}$$

$$\Delta \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}')\, \underbrace{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-4\pi\delta(\underline{r}-\underline{r}')} = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r}, t)$$

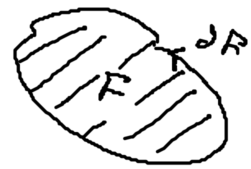
Also: $\boxed{\text{rot}\,\underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}}$

Verschiebungsstromdichte
= nicht stationärer Beitrag!

Für stationäre Strom- u. Ladungsverteilungen:

$$\boxed{\operatorname{rot} \underline{B} = \mu_0 \underline{j}}$$ differenzielle Form des Ampère-Gesetzes

Integration über Fläche F:




$$\int_F d\underline{f} \operatorname{rot} \underline{B} \overset{\text{Satz v.}}{\underset{\text{Stokes}}{=}} \oint_{\partial F} d\underline{s} \cdot \underline{B}$$

$$= \mu_0 \underbrace{\int_F d\underline{f} \cdot \underline{j}(\underline{r})}_{I \text{ Strom durch } F}$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{\partial F} d\underline{s} \cdot \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 I}$$ Integralform (Durchflutungsgesetz)

## Zusammenfassung

**Magnetostatik** (stationäre Ströme)

$$\boxed{\begin{array}{c} \operatorname{div} \underline{B} = 0 \\ \Updownarrow \\ \underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A} \end{array}} \Leftrightarrow \int_{\partial V} \underline{B} \cdot d\underline{f} = 0$$ (quellenfrei)

$$\boxed{\begin{array}{c} \operatorname{rot} \underline{B} = \mu_0 \underline{j} \\ \Updownarrow \\ \oint_{\partial F} d\underline{s} \cdot \underline{B} = \mu_0 I \end{array}}$$ Ampère

$$\boxed{\Delta \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r})}$$

gilt nur, falls $\operatorname{div} \underline{A} = 0$ (Coulomb-Eichung)

**Elektrostatik** (statische Ladungsverteilungen)

$$\boxed{\begin{array}{c} \operatorname{rot} \underline{E} = 0 \\ \Updownarrow \\ \underline{E} = -\nabla \phi \end{array}} \Leftrightarrow \oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} = 0$$ (wirbelfrei)

$$\boxed{\begin{array}{c} \varepsilon_0 \operatorname{div} \underline{E} = \rho \\ \Updownarrow \\ \varepsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E} = Q \end{array}}$$ diff. Form / integrale Form — Gauß

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r})}$$ Poisson-Gl.

Umeichung $\underline{A}' = \underline{A} + \nabla\chi(\underline{r})$ mit bel. $\chi(\underline{r})$ wegen

$$\underline{\nabla} \times \underline{A}' = \underline{\nabla} \times \underline{A} + \underbrace{\underline{\nabla} \times \underline{\nabla}\chi}_{=0}$$

$$\underbrace{\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A}')}_{\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}') - \Delta \underline{A}'} = \underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$$

$$\underline{\nabla}(\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{A}'}_{=0 \text{ in Coulomb-Eichung}}) - \Delta \underline{A}'$$

- Magnetostatik und Elektrostatik entkoppelt.