2.2. Magnetische Induktion

Experimentelle Erfahrung: WW zwischen bewegten Ladungen:

Kraft auf Ladung q, die sich mit $\underline{v}$ bewegt:

$$\boxed{\underline{F} = q\,\underline{v} \times \underline{B}(\underline{r})} \qquad \text{Lorentz-Kraft}$$

$\underline{B}(\underline{r})$: magnetische Induktion am Ort $\underline{r}$, erzeugt von anderen bewegten Ladungen mit Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}') = \rho(\underline{r}')\,\underline{v}$

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}} \qquad \text{Ampère-Gesetz}$$

(Analog zur Coulomb-WW in der Elektrostatik: $\underline{F} = q\,\underline{E}(\underline{r})$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r'\, \rho(\underline{r}')\, \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}\ )$$

Einheiten (SI): $[B] = 1\,\frac{Ns}{Cm} = 1 \cdot \underbrace{\frac{Nm}{C}}_{=V} \frac{s}{m^2} = 1\,T = 1$ Tesla

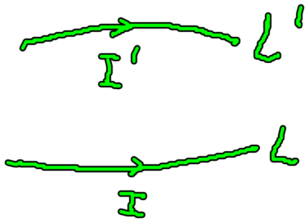
Damit ist $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}\,\frac{Vs}{Am}$ festgelegt (nicht wie ε_0 frei wählbar)

(Die magnet. Induktion beschreibt keine neue, von der Coulomb-WW unabhängige WW: Betrachte Transformation auf lokales Ruhesystem einer bewegten Ladung!)

Gauß-System: $[B] = \frac{dyn}{ESE} = \frac{\sqrt{dyn}}{cm} = 1\,G = 1$ Gauß

(ESu: Electrostatic unit)

Kraft zwischen 2 stromdurchflossenen Leitern



Betrachte 2 dünne Leiter L, L' mit zeitl. konstanten Strömen I, I'

Strom durch L': $\mathbf{j}\, d^3r' = \rho\, d^3r' \underbrace{\mathbf{v}'}_{\frac{d\mathbf{r}'}{dt}} = \underbrace{\rho \frac{d^3r'}{dt}}_{I'} d\mathbf{r}' = I'\, d\mathbf{r}'$

$\Rightarrow$ magnet. Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{L'} d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$

Kraft auf Ladung im Volumenelement d^3r von L:

$$d\mathbf{F} = \overbrace{\rho \mathbf{v}}^{\mathbf{j}} \times \mathbf{B}\, d^3r = \mathbf{j} \times \mathbf{B}\, d^3r = I\, d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \int_L d\mathbf{r} \times \int_{L'} d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}}$$

Kraft von L' auf L

(bac − cab)

mit $d\mathbf{r} \times (d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')) = (d\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'))\, d\mathbf{r}' - (d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$

und $\int_L d\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big|_{L\text{-Anfang}}^{L\text{-Ende}} = 0$ $\left(\begin{array}{c} L \text{ geschlossen} \\ \text{oder} \\ L\text{-Enden im } \infty \end{array}\right)$

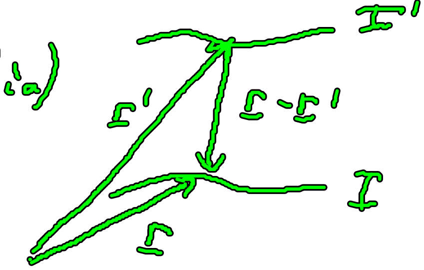
folgt

$$\boxed{\mathbf{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I I' \iint_{L\,L'} (d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}')\, \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}}$$

$\Rightarrow$ für parallele Ströme $(I\, d\mathbf{r} \cdot I'\, d\mathbf{r}' > 0)$ Anziehung

antiparallele Ströme $(I\, d\mathbf{r} \cdot I'\, d\mathbf{r}' < 0)$ Abstoßung

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{r}' \\ d\mathbf{r} \leftrightarrow d\mathbf{r}' \\ I \leftrightarrow I' \end{array}\right\} \quad \mathbf{F} \leftrightarrow -\mathbf{F} \quad (\text{actio} = \text{reactio})$$



2.3 Magnetostatische Feldgleichungen

(gilt auch in quasistat. Näherung: zeitliche Änderung $\ll$ räumliche Änderung)

Mit dem Vektorpotenzial

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

(nicht eindeutig!)
Umeichung möglich
$\underline{A} \to \underline{A} + \underline{\nabla}\psi$
mit bel. $\psi(\underline{r},t)$,
$\underline{\nabla} \times \underline{\nabla}\psi \equiv 0$

läßt sich

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \operatorname{rot} \underline{A}(\underline{r}) = \underline{\nabla} \times \underline{A}(\underline{r})}$$

schreiben.

Beweis: $\underline{\nabla} \times \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \underbrace{\left(\underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)}_{-\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}} \times \underline{j}(\underline{r}')$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = \underline{B}$$

Folgendes ist äquivalent:

(i) $\underline{B}(\underline{r}) = \operatorname{rot} \underline{A}$ hat Vektorpotenzial

$\Updownarrow$

(ii) $\boxed{\operatorname{div} \underline{B} = 0}$ $\quad (\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{A}) \equiv 0)$

$\Updownarrow$ Es gibt keine Quellen der magnet. Induktion ("magn. Ladungen")

$$\oint_{\partial V} \underline{B} \cdot d\underline{f} = 0$$

Aber: "Magnetische Monopole" postuliert von Dirac ($\sim$ 1930)
zur Erklärung der Quantelung der Ladung.
umstritten: Exp. Nachweis (?) durch supraleitende Spule 1982
[Spektrum der Wiss.: Juni 1982, p. 78]

Zusammenhang zwischen $\underline{B}$ und $\underline{j}$:
(auch nichtstationär)

$$\mathrm{rot}\,\underline{B} = \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A}) = \underline{\nabla}\,\underbrace{(\underline{\nabla} \cdot \underline{A})}_{(*)} - \Delta \underline{A}$$

$$(*)\quad \underline{\nabla} \cdot \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r'\, \underline{\nabla}_r \cdot \left(\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \cdot \underbrace{\underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-\underline{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \left[\underbrace{-\underline{\nabla}_{r'} \cdot \left(\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right)}_{\text{Gauß'scher Satz}} + \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underbrace{\underline{\nabla}_{r'} \cdot \underline{j}(\underline{r}')}_{-\frac{\partial}{\partial t}\rho} \right]$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\int_{S(r\to\infty)} d\underline{f}' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{0 \text{ für hinreichend rasch abfallendes } \underline{j}(\underline{r}')} - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\mu_0 \varepsilon_0 \phi(\underline{r},t)}$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{A}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \phi(\underline{r},t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}$$

$$\Delta \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}')\, \underbrace{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-4\pi\delta(\underline{r}-\underline{r}')} = -\mu_0\, \underline{j}(\underline{r},t)$$

Also: $\boxed{\mathrm{rot}\,\underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}}$

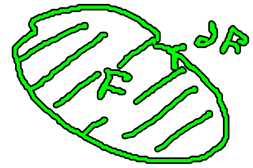
Verschiebungsstromdichte
= nichtstationärer Beitrag!

Für stationäre Strom- u. Ladungsverteilungen:

$$\boxed{\operatorname{rot} \underline{B} = \mu_0 \underline{j}}$$

differenzielle Form des Ampère-Gesetzes

Integration über Fläche F:



$$\int_F d\underline{f}\, \operatorname{rot}\underline{B} \overset{\text{Satz v.}}{\underset{\text{Stokes}}{=}} \oint_{\partial F} d\underline{s}\cdot\underline{B}$$

$$= \mu_0 \underbrace{\int_F d\underline{f}\cdot\underline{j}(\underline{r})}_{I \text{ Strom durch } F}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\oint_{\partial F} d\underline{s}\cdot\underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 I}$$

Integralform (Durchflutungsgesetz)

Zusammenfassung

Magnetostatik (stationäre Ströme)	Elektrostatik (statische Ladungsverteilungen)
$\operatorname{div}\underline{B} = 0 \Leftrightarrow \underline{B} = \operatorname{rot}\underline{A}$ (quellenfrei) $\Leftrightarrow \oint_{\partial V} \underline{B}\cdot d\underline{f} = 0$	$\operatorname{rot}\underline{E} = 0 \Leftrightarrow \underline{E} = -\nabla\phi$ (wirbelfrei) $\Leftrightarrow \oint_{\partial F} \underline{E}\cdot d\underline{s} = 0$
$\operatorname{rot}\underline{B} = \mu_0 \underline{j} \Leftrightarrow \oint_{\partial F} d\underline{s}\cdot\underline{B} = \mu_0 I$ (Ampère)	$\varepsilon_0 \operatorname{div}\underline{E} = \rho$ (diff. Form) $\Leftrightarrow \varepsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{E} = Q$ (integrale Form) (Gauß)
$\Delta\underline{A} = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r})$	$\Downarrow$ $\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r})$ (Poisson-Gl.)

gilt nur falls $\operatorname{div}\underline{A} = 0$ (Coulomb-Eichung)

Umeichung $\underline{A}' = \underline{A} + \nabla\psi(\underline{r})$ mit bel. $\psi(\underline{r})$ wegen

$$\nabla \times \underline{A}' = \nabla \times \underline{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla\psi}_{=0}$$

$$\underbrace{\nabla \times (\nabla \times \underline{A}')}_{\nabla(\underbrace{\nabla \cdot \underline{A}'}_{=0 \text{ in Coulomb-Eichung}}) - \Delta \underline{A}'} = \nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$$

- Magnetostatik und Elektrostatik entkoppelt.