2.4. Magnetische Multipole (stationär)

Ausgangspunkt: $\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ (Coulomb-Eichung: $\operatorname{div} \underline{A} = 0$)

mit Randbed. $\underline{A}(\underline{r}) \to 0$ für $r \to \infty$

Taylorentwicklung von $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ für räumlich-lokalisierte stationäre Stromverteilung $\underline{j}(\underline{r}')$ für $r' \ll r$ um $\underline{r}' = 0$:

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{(\underline{r}\cdot\underline{r}')}{r^3} + \dots$$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, (\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}(\underline{r}') + \dots$$

Monopol-Term

Mit $\nabla_{r'}\cdot[x_k' \, \underline{j}(\underline{r}')] = x_k' \underbrace{(\nabla_{r'}\cdot\underline{j})}_{0 \text{ ! stat. !}} + \underbrace{\underline{j}\cdot\nabla_{r'} x_k'}_{j_l \delta_{lk} = j_k} = j_k$

folgt:

$$\int d^3r' \, j_k(\underline{r}') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \nabla_{r'}\cdot[x_k' \, \underline{j}] \overset{\text{gauss}}{=} \oint_{S_\infty} d\underline{f}\cdot x_k' \, \underline{j} = 0$$

Monopol-Term verschwindet

Dipol-Term

Mit $(\underline{r}'\times\underline{j})\times\underline{r} = (\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j} - (\underline{r}\cdot\underline{j})\,\underline{r}'$ $\qquad$ $\underset{\underline{r}}{\underline{a}}\times(\underset{\underline{j}}{\underline{b}}\times\underset{\underline{r}'}{\underline{c}}) = \underline{b}(\underline{a}\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\underline{b})$

$$= 2(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j} - [(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j} + (\underline{r}\cdot\underline{j})\underline{r}'] \quad (*)$$

und $\underline{\nabla}_{r'} \cdot \{x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j}\} = [(\underline{r}\cdot\underline{r}')j_k + x_k'(\underline{r}\cdot\underline{j}) + x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{j}}_{0}]$ stat.!

folgt

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \underline{\nabla}_{r'} \cdot \{x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j}\}}_{\underbrace{\int_{S_\infty} d\underline{f}' \{x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j}\}}_{0,\ \text{da}\ \underline{j} \xrightarrow{r\to\infty} 0}} = \int d^3r' [(\underline{r}\cdot\underline{r}')j_k + (\underline{r}\cdot\underline{j})x_k'] = 0$$

$\Longrightarrow$ $[\ldots]$ in $(*)$ gibt keinen Beitrag

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' (\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}'))}_{\underline{m}} \times \underline{r} \qquad \text{Dipolpotenzial}$$

$\underline{m}$ magn. Dipolmoment

$$\boxed{\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\, \underline{m} \times \underline{r}}$$

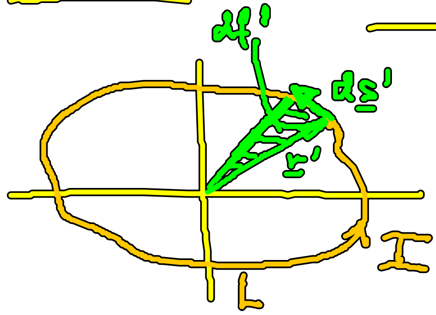
(analog zu $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\, \underline{p}\cdot\underline{r}$ mit $\underline{p} := \int d^3r'\, \underline{r}'\varrho(\underline{r}')$ el. Dipolmoment)

Magn. Induktion des Dipolmoments $\underline{m}$:

$$\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot}\left[\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\, \underline{m} \times \underline{r}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^5}[3(\underline{m}\cdot\underline{r})\underline{r} - r^2\underline{m}]$$

(analog $\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^5}[3(\underline{p}\cdot\underline{r})\underline{r} - r^2\underline{p}]$ el. Dipolfeld)

Beispiel: (i) ebene Leiterschleife L



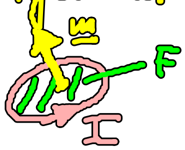
$$d\underline{f}' = \frac{1}{2}\,\underline{r}' \times d\underline{s}'$$

$$d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}') = d\underline{s}'\,I \qquad (\text{Strom durch } L)$$

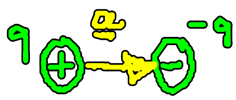
$$\underline{m} = \frac{1}{2}\oint_L d^3r'\,\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}') = \frac{I}{2}\oint_L \underline{r}' \times d\underline{s}' = I\int_F d\underline{f}' = I F\,\underline{n}$$

$\underline{n}$ Normale auf der von L eingeschloss. Fläche F

also: Ringstrom $\longrightarrow$ magn. Dipolmoment $\underline{m}$



(analog 2 Pkt. lad. $\longrightarrow$ el. Dipolmoment $\underline{p} = q\underline{a}$)



(ii) **Bewegte Ladungen**

N Teilchen mit Massen m_i und Ladungen q_i, spezif. Ladung $\frac{q_i}{m_i} = \frac{q}{m}$ sei konstant:

$$\rho(\underline{r}) = \sum_i q_i\,\delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$$

$$\underline{j}(\underline{r}) = \sum_i q_i \underline{v}_i\,\delta(\underline{r} - \underline{r}_i) \quad \text{mit Geschw. } \underline{v}_i = \frac{d\underline{r}_i}{dt}$$

magn. Dipolmoment:

$$\underline{m} = \frac{1}{2}\int d^3r'\,\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}') = \frac{1}{2}\sum_i q_i \int d^3r'\,\underline{r}' \times \underline{v}_i\,\delta(\underline{r}' - \underline{r}_i)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i q_i\, \underline{r}_i \times \underline{v}_i = \frac{1}{2}\sum_i \underbrace{\frac{q_i}{m_i}}_{\frac{q}{m}} \underline{r}_i \times m_i \underline{v}_i = \frac{q}{2m}\underline{L}$$

$\underline{L}$ Bahndrehimpuls

$$\boxed{\underline{m} = \frac{q}{2m}\underline{L}}$$

gilt auch für starre Körper

gilt nicht für Spin eines Elektrons!

$$\underline{m} = g\frac{e}{2m}\underline{S} \quad \text{mit } g \approx 2 \text{ Landé-Faktor}$$

<u>Kraft auf Stromverteilung</u> $\underline{j}(\underline{r}') = \rho(\underline{r}')\underline{v}(\underline{r}')$

im Feld einer magn. Induktion $\underline{B}(\underline{r}')$ (extern)

$$\underline{B}(\underline{r}') = \underline{B}(\underline{r}) + \left[(\underline{r}'-\underline{r})\cdot\underline{\nabla}_r\right]\underline{B}(\underline{r}) + \ldots$$

Taylorentw. (Punktdipol im geg. $\underline{B}(\underline{r})$)

Lorentz-Kraft $\quad \underline{F} = \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}')\times\underline{B}(\underline{r}')$

$$\Rightarrow \underline{F} = \underbrace{\left[\int d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}')\right]}_{0}\times\underline{B}(\underline{r}) + \int d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}')\times\left[(\underline{r}'-\underline{r})\cdot\underline{\nabla}_r\right]\underline{B}(\underline{r}) + \ldots$$

kein Monopol! (stat.)

$$= \int d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}')\times\underbrace{\left[(\underline{r}'\cdot\underline{\nabla}_r)\underline{B}(\underline{r})\right]}_{\underline{\nabla}_r(\underline{r}'\cdot\underline{B}(\underline{r})) - \underline{r}'\times\underbrace{(\underline{\nabla}_r\times\underline{B}(\underline{r}))}_{0\ (\text{ext.!})}} - \underbrace{\int d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}')}_{0\ (\text{stat.})}\times\left[(\underline{r}\cdot\underline{\nabla}_r)\underline{B}(\underline{r})\right] + \ldots$$

$$= \underbrace{\int d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}')\times\underline{\nabla}_r(\underline{r}'\cdot\underline{B}(\underline{r}))}_{-\underline{\nabla}_r\times\left[(\underline{r}'\cdot\underline{B})\underline{j}(\underline{r}')\right] + (\underline{r}'\cdot\underline{B})\underbrace{(\underline{\nabla}_r\times\underline{j}(\underline{r}'))}_{0}}$$

$$= -\underline{\nabla}_r\times(\underline{m}\times\underline{B}(\underline{r})) = (\underline{m}\cdot\underline{\nabla}_r)\underline{B}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}_r\underbrace{(-\underline{m}\cdot\underline{B}(\underline{r}))}$$

Pot. Energie eines Dipols im Magnetfeld $\quad \boxed{V = -\underline{m}\cdot\underline{B}(\underline{r})}$

(analog: $V = -\underline{p}\cdot\underline{E}$ für el. Dipol im Feld)

3. Maxwell-Gleichungen im Vakuum

3.1 Induktionsgesetz

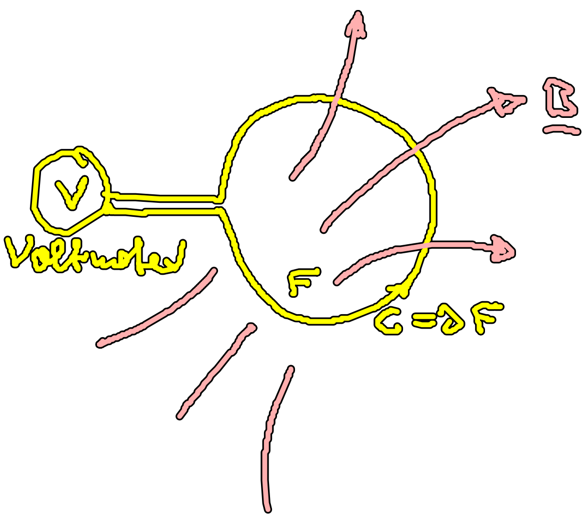
Betrachte nun nichtstationäre Ladungs- und Stromverteilungen u. Felder

<u>Exp. Erfahrung</u> (Faraday 1831):
zeitl. veränderliche Magnetfelder induzieren eine Spannung in einer Leiterschleife:

$$\boxed{\oint_C \underline{E} \cdot d\underline{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t)}$$

<u>Faraday'sches Induktionsgesetz</u>

mit <u>magn. Fluss</u> $\Phi := \int_F \underline{B} \cdot d\underline{f} = \int_F \mathrm{rot}\, \underline{A} \cdot d\underline{f} \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial F} \underline{A} \cdot d\underline{s}$



Änderung des magn. Flusses

a) durch $\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}$ (Trafo)

b) durch $\frac{\partial}{\partial t} F$ (Fahrraddynamo / mit Permanentmagn)