Energiebilanz $\boxed{\frac{\partial}{\partial t} w + \underline{\nabla} \cdot \underline{S} = -\underline{j} \cdot \underline{E}}$

$w := \frac{1}{2} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H})$ Energiedichte

$\underline{S} := \underline{E} \times \underline{H}$ Energiestromdichte

$\sigma = -\underline{j} \cdot \underline{E}$ Leistungsdichte

Beispiel: Beschleunigung von Teilchen durch $\underline{E}, \underline{B}$:

Kraft auf die Ladung q: $\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

Kraftdichte: $\underline{f} = \rho(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

Leistungsdichte der Felder auf Ladungsdichte ρ:

$$\underline{f} \cdot \underline{v} = \rho \underline{v} \underline{E} + \rho \underbrace{\underline{v}(\underline{v} \times \underline{B})}_{0} = \underline{j} \cdot \underline{E}$$

Verlustdichte der Feldenergie (Magnetfeld leistet keine Arbeit, da $\underline{F} \perp \underline{v}$)

* Feldenergie ist keine Erhaltungsgröße!

1. Beispiel: Ohm'sche Gesetz $\underline{j} = \sigma \underline{E}$ mit konst. Leitfähigk. $\sigma > 0$

(phänomenolog. Materialgesetz! gilt in Metallen u. Halbleitern für hinreichend kleine Felder $\underline{E}$)

$\Rightarrow$ Energiebilanz $\frac{\partial}{\partial t} w + \underline{\nabla} \cdot \underline{S} = -\sigma \underline{E}^2 < 0$

d.h. stets Verlust von Feldenergie

(Konsequenz des 2. Hauptsatzes der Thermodyn.)

E-Dynamik ist zeitumkehrinvariant

$\Updownarrow$

Ohm'sches Gesetz <u>nicht</u> zeitumkehrinvariant

$t \to -t$

$\underline{j} \to -\underline{j}$

$\underline{E} \to \underline{E}$

$\sigma \underline{E}^2$ wird als Joule'sche Wärme im Leiter dissipiert (<u>Irreversibilität</u>)

<u>2. Beispiel</u>: Antennenabstrahlung (offenes System)

$\underline{j}$ in der metallischen Antenne ist dem Wechselfeld $\underline{E}$ außerhalb der Antenne entgegengesetzt $\Rightarrow \underline{j} \cdot \underline{E} < 0$

$\to$ Energiegewinn des Feldes

3.5 Impulsbilanz

Aus den Maxwell-Gln. folgt eine weitere Bilanzgl. für den Impulstransport durch das el. magn. Feld:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\underline{D} \times \underline{B}) = \underbrace{\dot{\underline{D}}}_{\nabla \times \underline{H} - \underline{j}} \times \underline{B} + \underline{D} \times \underbrace{\dot{\underline{B}}}_{-\nabla \times \underline{E}}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} \underline{B} \times (\nabla \times \underline{B}) - \underline{j} \times \underline{B} - \varepsilon_0 \underline{E} \times (\nabla \times \underline{E})$$

Es gilt die Vektorumformung

$$\underline{B} \times (\nabla \times \underline{B}) = \frac{1}{2} \nabla (\underline{B} \cdot \underline{B}) - (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{B}$$

$$= \nabla \cdot \left\{ \underline{\underline{1}} \frac{1}{2} (\underline{B} \cdot \underline{B}) - \underline{B} \otimes \underline{B} \right\} + \underline{B} \underbrace{(\nabla \cdot \underline{B})}_{0}$$

wobei $\underline{\underline{1}}$ der Einheitstensor 2. Stufe

$\underline{B} \otimes \underline{B}$ das Tensorprodukt (dyadisches Produkt)
und $\underline{\nabla}\cdot\{\dots\}$ die Divergenz eines Tensors $\underline{\underline{T}}$ 2. Stufe ist

(In Komponenten $(\underline{B}\otimes\underline{B})_{ij} = B_i B_j$
$(\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{T}})_\beta := \partial_\alpha T_{\alpha\beta}$)

Analog: $\underline{E} \times (\underline{\nabla}\times\underline{E}) = \underline{\nabla}\cdot\left\{ \underline{\underline{1}}\,\frac{1}{2}(\underline{E}\cdot\underline{E}) - \underline{E}\otimes\underline{E}\right\} + \underline{E}\,\underbrace{(\underline{\nabla}\cdot\underline{E})}_{\rho/\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\underline{D}\times\underline{B}) + \underline{\nabla}\cdot\left\{\underline{\underline{1}}\,\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \varepsilon_0\underline{E}\otimes\underline{E} - \frac{1}{\mu_0}\underline{B}\otimes\underline{B}\right\}$$
$$= -\underbrace{(\rho\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B})}$$

Kraftdichte $\underline{f}$, die von den Feldern auf Ladungsdichte ρ u. Stromdichte $\underline{j}$ ausgeübt wird

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\underline{g} + \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{T}} = -(\rho\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B})}$$ Bilanzgl. für Impulstransport

mit

$\underline{g} := \underline{D}\times\underline{B}$ Impulsdichte des Feldes

(Nach Newton $\frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{F} \Rightarrow \frac{d}{dt}\underline{g} = \underline{f}$)

$$\underline{\underline{T}} := \underline{\underline{1}}\,\frac{1}{2}(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}) - \underline{E}\otimes\underline{D} - \underline{B}\otimes\underline{H}$$

Impulsstromdichte-Tensor des Feldes
(Maxwell'scher Spannungstensor)

in Komponenten:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}\right) - E_\alpha D_\beta - B_\alpha H_\beta$$

(Stromdichte in α-Richtung der β-Komponente der Impulsdichte)
Stromdichte

$$\operatorname{Sp}\underline{\underline{T}} = T_{\alpha\alpha} = \frac{3}{2}\left(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}\right) - \left(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}\right) = \frac{1}{2}\left(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}\right) = w \quad (\text{Energiedichte})$$

$\underline{g}$

$\underline{\underline{T}}$ ist symmetrisch: $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} g_\beta + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} T_{\alpha\beta} = -f_\beta}$$

Impuls Impulsaustausch zwischen Feld u. geladenen Teilchen

Bem.: Eine analoge Bilanzgl. gilt für die Drehimpulsdichte des Feldes; sie beschreibt Drehimpulsaustausch zwischen Feld u. geladenen Teilchen.

3.6 Eichinvarianz

Darstellung der ~~Felder~~ $\underline{E}, \underline{B}$ durch $\phi(\underline{r},t)$, $\underline{A}(\underline{r},t)$:

$$\boxed{\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\,, \quad \underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}}$$

Frage: allg. Trafo $\phi \to \phi'$, $\underline{A} \to \underline{A}'$, welche $\underline{E}, \underline{B}$ invariant läßt?

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \overset{!}{=} -\underline{\nabla}\phi' - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}'$$

$$\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A} \overset{!}{=} \underline{\nabla}\times\underline{A}' \qquad \Rightarrow \underline{A}' = \underline{A} + \underline{\nabla}G(\underline{r},t)$$

$$\Rightarrow -\underline{\nabla}\phi - \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}} \overset{!}{=} -\underline{\nabla}\phi' - \frac{\partial}{\partial t}\left(\cancel{\underline{A}} + \underline{\nabla}G\right) \qquad \left(\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}G \equiv 0\right)$$

$\Rightarrow \underline{\nabla}\left(\phi' - \phi + \frac{\partial}{\partial t}G\right) = 0$

$\Rightarrow \quad \phi' - \phi + \frac{\partial}{\partial t}G = g(t)$ unabh. v. $\underline{r}$

Mit $F(\underline{r},t) := G(\underline{r},t) - \int_{t_0}^{t} dt'\, g(t')$

ergibt sich

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{A}'(\underline{r},t) &= \underline{A}(\underline{r},t) + \underline{\nabla} F(\underline{r},t) \\ \phi'(\underline{r},t) &= \phi(\underline{r},t) - \frac{\partial}{\partial t} F(\underline{r},t) \end{aligned}}$$

mit beliebiger Eichfkt. $F(\underline{r},t)$

physikal. relevant: $\oint_{\partial F} d\underline{s}\cdot\underline{A} = \int_F d\underline{f}\cdot\underline{B} = \underline{\Phi}$

Durch $\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$, $\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$ sind die homog. Maxwell-glu. erfüllt

$\left(\underline{\nabla}\times\underline{E} = \underbrace{-\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\phi}_{0} - \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\underline{\nabla}\times\underline{A}}_{\underline{B}},\quad \underline{\nabla}\cdot\underline{B} = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{A}) \equiv 0\right)$

Umkehrung:

$\underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0 \Rightarrow \exists\, \underline{A} : \underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$

$\underline{\nabla}\times\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = -\underline{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \Rightarrow \underline{\nabla}\times\left(\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\right) = 0 \Rightarrow \exists\,\phi :$

$\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} = -\underline{\nabla}\phi$

Wähle nun Eichung, so dass die inhomogenen Maxwell-glu. besonders einfach werden:

Ziel: Entkopplung der Glu. für $\underline{A}$ und ϕ

(i) Lorenz-Eichung (Ludwig V. Lorenz, dän. Physiker) 1867

$\Updownarrow$

$$\boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0}$$

Hendrik A. Lorentz

Hiermit werden die Feldglu. entkoppelt

a) $-\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \underline{\nabla}\left(\underline{\nabla}\phi + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

$$\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

Lorenz-Eichung:

$$\boxed{\Delta\phi - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho}$$

b) $\frac{1}{\mu_0}\underline{\nabla}\times\underline{B} - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underline{E} = \underline{j}$

$$\underbrace{\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})}_{\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A})-\Delta\underline{A}} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{\nabla}\phi + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\right) = \mu_0\underline{j}$$

$$\Delta\underline{A} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A} - \underline{\nabla}\underbrace{\left(\underline{\nabla}\cdot\underline{A} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\phi\right)}_{0 \text{ Lorenz}} = -\mu_0\underline{j}$$

$$\boxed{\Delta\underline{A} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A} = -\mu_0\underline{j}}$$

Zus.fassung mit d'Alembert-Op. $\Box := \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$\boxed{\begin{aligned}\Box\phi &= -\frac{1}{\epsilon_0}\rho\\ \Box\underline{A} &= -\mu_0\underline{j}\end{aligned}}$$

inhomogene Wellengln.

(entkoppelt!)

$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 2.997\times10^8\,\frac{m}{s}$ Lichtgeschwindigkeit

(= Ausbreitungsgeschw. el. magn. Wellen im Vakuum)