(ii) Coulomb-Eichung (Strahlungseichung)

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{A} = 0}$$

(vgl. § 2.3, Magnetostatik:
Für $\dot{\underline{D}} = 0$ folgt speziell $\nabla \times \underline{B} = \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \underline{A})}_{0} - \underbrace{\Delta \underline{A} = \mu_0 \underline{j}}_{\text{Poisson-Gl. der Magnetostatik}}$

Allg.: Zerlegung von $\underline{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial}{\partial t} \underline{A}$

in longitudinales Feld $\underline{E}_l := -\nabla \phi$ (wirbelfrei)
und Transversalfeld $\underline{E}_t := -\frac{\partial}{\partial t} \underline{A}$ (quellenfrei)

Tatsächlich gilt: $\nabla \times \underline{E}_l = -\nabla \times \nabla \phi = 0$

$$\nabla \cdot \underline{E}_t = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \underline{A} = 0$$

$\underline{B}$ ist immer transversal: $\nabla \cdot \underline{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \underline{A}) = 0$

Also: ϕ ergibt die longitudinalen Felder,
$\underline{A}$ die transversalen Felder

Zerlegung der Stromdichte: $\underline{j} = \underline{j}_l + \underline{j}_t$

mit $\nabla \times \underline{j}_l = 0$, $\nabla \cdot \underline{j}_t = 0$

Mit $\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \rho}_{\varepsilon_0 \nabla \cdot \underline{E}_l} + \nabla \cdot \underline{j}_l + \underbrace{\nabla \cdot \underline{j}_t}_{=0} = 0$ folgt:

$$\nabla \cdot \left(\underline{j}_l + \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}_l}{\partial t} \right) = 0$$

Außerdem gilt nach der Definition von „longitudinal“:

$$\nabla \times \left(\underline{j}_l + \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}_l}{\partial t} \right) = 0$$

$\Rightarrow \quad \underline{j}_\ell + \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}_\ell}{\partial t} = \text{const.} = 0$, da für $r \to 0$ verschwindet

$$\Rightarrow \quad \boxed{\underline{j}_\ell = \varepsilon_0 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

Die Feldgleichungen $\Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\nabla \cdot \underline{A}}_{=0} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$

$$\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{A} - \nabla \big(\underbrace{\nabla \cdot \underline{A}}_{=0} \big) - \mu_0 \underbrace{\varepsilon_0 \nabla \frac{\partial}{\partial t} \phi}_{= \underline{j}_\ell} = -\mu_0 \underline{j}$$

erhalten die Form

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \\ \Box \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}_t \end{array}}$$

$\Rightarrow$ longitudinale Felder $\hat{=}$ Elektrostatik

$\Rightarrow$ transversale Felder $\hat{=}$ el. magnet. Wellen

Die Coulomb-Eichung ist zweckmäßig bei Strahlungsproblemen!

Poisson-Gleichung für ϕ

Wellen-Gleichung für $\underline{A}$

4. Elektromagnetische Wellen

Im statischen Fall sind $\underline{E}$ und $\underline{B}$ entkoppelt.

Im dynamischen Fall sind $\underline{E}$ und $\underline{B}$ über den

Verschiebungsstrom $\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \underline{B} - \underline{j} = \varepsilon_0 \dot{\underline{E}}$

und das

Induktionsgesetz $\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$

gekoppelt. $\Rightarrow$ elektromagnet. Wellenausbreitung.

4.1. Freie Wellenausbreitung im Vakuum

Betrachte Raumbereich ohne Quellen: $\rho = 0$

$\underline{j} = 0$

$$\Box \phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \qquad \Box \underline{A} = -\mu_0 \underline{j} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \Box \phi &= 0 \\ \Box \underline{A} &= 0 \end{aligned}}$$

homogene Wellengln. (Lorentz-Eichung)

wegen $\underline{E} = -\dot{\underline{A}} - \nabla \phi$, $\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$ gilt auch

$$\boxed{\begin{aligned} \Box \underline{E} &= 0 \\ \Box \underline{B} &= 0 \end{aligned}}$$

(Dies folgt auch direkt aus $\underline{\nabla} \times \underline{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\underline{E}}$, $\underline{\nabla} \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$:

$$\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{E}) = \underline{\nabla} \underbrace{(\underline{\nabla} \cdot \underline{E})}_{=0} - \Delta \underline{E} = -\underline{\nabla} \times \dot{\underline{B}} = -\varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\underline{E}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\Delta - \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0}_{\frac{1}{c^2}} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \underline{E} = 0 \quad)$$

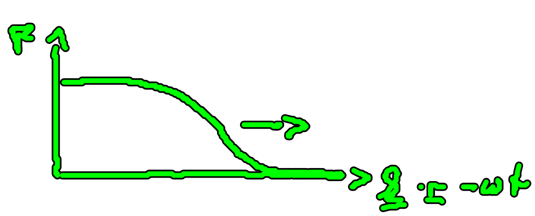
Allgemeine Lösung von $\Box u(\underline{r}, t) = 0$:

$u(\underline{r}, t) = F(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)$ mit bel., 2x diffbarer Funktion $F(\varphi)$

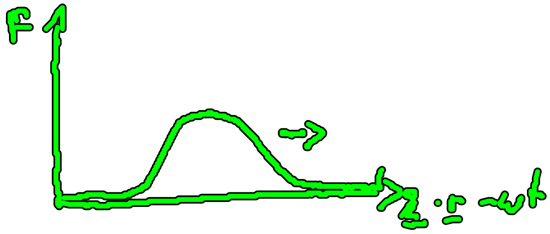
und $\omega = c|\underline{k}|$ (d'Alembertsche Lösung)

Beweis: $\Box F = \left(\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) F''(\varphi) = 0$

NB: F muß nicht periodisch in φ sein, z.B. solitäre Wellen:

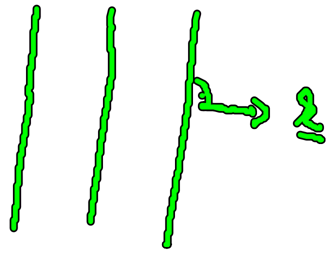


„Kink“



„Domäne"

$\mathbf{k}$ Wellenvektor
ω Frequenz
φ Phase



(Ausbreitungsrichtung)
$\nabla\varphi(\mathbf{r},t) = \mathbf{k}$

Flächen konstanter Phase:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t = \varphi(\mathbf{r},t) \overset{!}{=} \text{const.}$$

$\Rightarrow$ ebene Wellen

$$\mathbf{k}\cdot\left\{\mathbf{r} - \frac{1}{k^2}\,\mathbf{k}\,(\omega t + \varphi)\right\} = 0$$

Ausbreitung der Orte konstanter Phase

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{k^2}\,\mathbf{k}\,(\omega t + \varphi)$$

$\Rightarrow$ Phasengeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{ph} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\Big|_{\varphi=\text{const}} = \frac{\mathbf{k}}{k^2}\,\omega = c\,\frac{\mathbf{k}}{k}$$

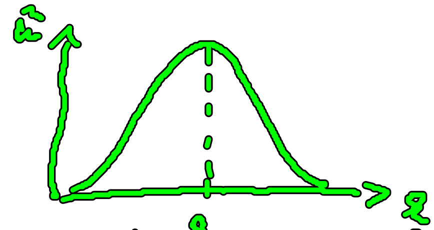
spezielle Lösung: harmonische ebene Welle

$$u(\mathbf{r},t) = \underbrace{\hat{u}(\mathbf{k})}_{\text{komplexe Amplitude}}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

Lineare Superposition (für allg. Dispersionsrelation $\omega(\mathbf{k})$):

$$u(\mathbf{r},t) = \int d^3k\, \hat{u}(\mathbf{k})\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)}$$

Sei $\hat{u}(\mathbf{k})$ um $\mathbf{k}_0$ lokalisiert:



$\Rightarrow$ Wellenpaket (im Ortsraum lokalisiert)

Denn: Taylor-Entwicklung der Phase um $\underline{k}_0$

$$\omega(\underline{k}) \approx \underbrace{\omega(\underline{k}_0)}_{\omega_0} + \underbrace{(\underline{k}-\underline{k}_0)}_{\hat{\underline{k}}} \underbrace{\nabla_k \omega(\underline{k})\big|_{\underline{k}=\underline{k}_0}}_{\underline{v}_g} + \dots$$

$$= \omega_0 + (\underline{k}-\underline{k}_0)\cdot \underline{v}_g$$

ergibt

$$u(\underline{r},t) = \underbrace{e^{i(\underline{k}_0\underline{r}-\omega_0 t)}}_{\substack{\text{Trägerwelle mit}\\ \text{Phasengeschwindigkeit}\\ \underline{v}_{Ph} = \frac{\omega_0}{k_0}}} \underbrace{\int d^3\hat{k}\; \hat{u}(\underline{k}_0+\hat{\underline{k}})\, e^{i\hat{\underline{k}}(\underline{r}-\underline{v}_g t)}}_{\substack{\text{Einhüllende; Max}\\ \text{bewegt sich mit Gruppengeschwindigkeit}}}$$

$$\boxed{\underline{v}_g = \nabla_k \omega(\underline{k})}$$

<u>Dispersionsrelation</u> $\omega(\underline{k})$:

el. magn. Welle im Vakuum $\omega(\underline{k}) = c|\underline{k}|$

$$\Rightarrow \underline{v}_g = c\frac{\underline{k}}{|\underline{k}|} \overset{!}{=} \underline{v}_{Ph} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\,\underline{n}$$

<u>keine Dispersion</u> (d.h. kein Zerfließen)!

(im Gegensatz zu el. magn. in dispersiven Medien oder q.m. Materiewellen im Vakuum)

<u>Polarisation</u>

Betrachte el. magn. Welle $\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$

$\underline{B}(\underline{r},t) = \underline{B}_0 e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$

Allgemein gilt:

$\underline{E}$ heißt <u>transversal</u>, falls $\nabla\cdot\underline{E} = 0$ (quellenfrei)

$\Rightarrow i\underline{k}\cdot\underline{E} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\underline{E} \perp \underline{k}}$

$\underline{E}$ heißt <u>longitudinal</u>, falls $\nabla\times\underline{E} = 0$ (wirbelfrei)

$$\Rightarrow i\,\underline{k}\times\underline{E}=0 \quad \Rightarrow \boxed{\underline{E}\parallel\underline{k}}$$

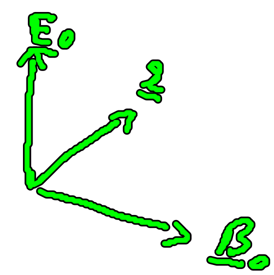
Für $\rho=0$ ist wegen $\underline{\nabla}\cdot\underline{E}=0$: $\underline{E}(\underline{r},t)$ transversal

wegen $\underline{\nabla}\cdot\underline{B}=0$: $\underline{B}(\underline{r},t)$ transversal

Weiter folgt aus $\underline{\nabla}\times\underline{E}+\dot{\underline{B}}=0$:

$$\left(i\,\underline{k}\times\underline{E}_0 - i\omega\underline{B}_0\right)e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}=0 \quad \forall\, \underline{r}, t$$

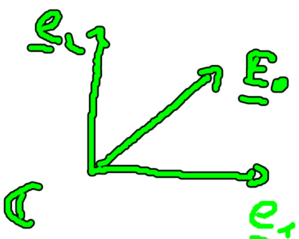
$$\Rightarrow \boxed{\underline{B}_0=\frac{1}{c}\,\underline{n}\times\underline{E}_0} \qquad \underline{n}=\frac{\underline{k}}{k}$$



$\underline{k}, \underline{E}_0, \underline{B}_0$ bilden ein Rechtssystem

Die Richtung von $\mathrm{Re}\{\underline{E}_0, \underline{B}_0\}$ legt

Polarisation fest:



Sei $\underline{k}\parallel \underline{e}_3$-Achse ; $\underline{E}_0 = E_{01}\underline{e}_1 + E_{02}\underline{e}_2$

mit $E_{0i}=a_i e^{i\delta_i} \in \mathbb{C}$

$(i=1,2)$

Physikalisches Feld:

$$\underline{E}_1(\underline{r},t)=\mathrm{Re}\left\{a_1 e^{i(\delta_1+\underbrace{\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t})}\right\}=a_1\cos(\varphi+\delta_1)$$

$$\underline{E}_1(\underline{r},t)=\mathrm{Re}\left\{a_2 e^{i(\delta_2+\varphi)}\right\}=a_2\cos(\varphi+\delta_2)$$

Aus $\dfrac{E_1}{a_1}=\cos\varphi\cos\delta_1-\sin\varphi\sin\delta_1$

$\dfrac{E_2}{a_2}=\cos\varphi\cos\delta_2-\sin\varphi\sin\delta_2$

lässt sich φ (und somit $\underline{r},t$) eliminieren:

$$\frac{E_1}{a_1}\sin\delta_2-\frac{E_2}{a_2}\sin\delta_1=\cos\varphi\,\sin(\overbrace{\delta_2-\delta_1}^{\delta}) \qquad (1)$$

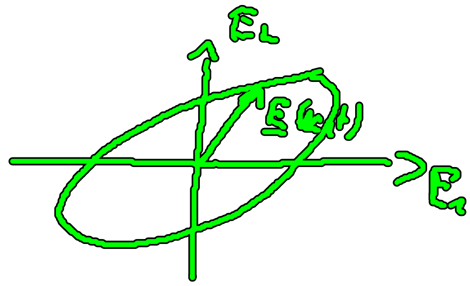
δ

$$\frac{E_1}{a_1}\cos\delta_2 - \frac{E_2}{a_2}\cos\delta_1 = \sin\varphi\,\sin(\overbrace{\delta_2-\delta_1}) \qquad (2)$$

$(1)^2 + (2)^2$

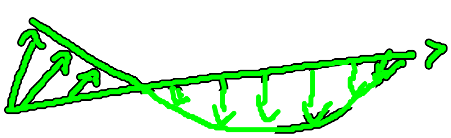
$$\Longrightarrow \boxed{\left(\frac{E_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{a_2}\right)^2 - 2\,\frac{E_1}{a_1}\,\frac{E_2}{a_2}\cos\delta = \sin^2\delta}$$

Ellipsengleichung für E_1, E_2



Der Feldvektor $\underline{E}$ läuft als Funktion von φ auf einer Ellipse $\perp \underline{k}$ um: <u>elliptische Polarisation</u>

$\underline{E}(z,t)$

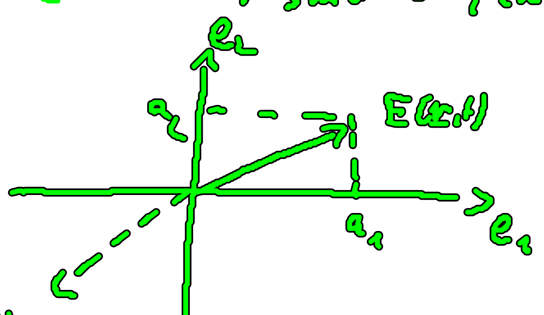


$\varphi = \underline{k}\,z - \omega t$
($\hat{=}$ z für festes t oder t für festes r)

<u>Spezialfälle</u>:

(a) linear polarisierte Welle: $\delta_1 = \delta_2 + m\pi \Rightarrow \sin\delta = 0, \ \cos\delta = \pm 1$

$$\boxed{\frac{E_1}{a_1} \pm \frac{E_2}{a_2} = 0}$$



<u>Gerade</u>: $\underline{E}(z,t) = \underline{E}_0 \cos\varphi(z,t)$
mit $\underline{E}_0$ <u>reell</u>

(b) zirkular polarisierte Welle: $a_1 = a_2 \equiv a$

$\delta_2 = \delta_1 + (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\delta = 0$
$\sin\delta = \pm 1$

$$\boxed{E_1^2 + E_2^2 = a^2}$$

(≙ Überlagerung zweier um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschobener, lin. polarisierter Wellen)

$\underline{E}$ läuft auf $\underline{\text{Kreis}}$ um: $\underline{E}(x,t) = a\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \mp\sin\varphi\end{pmatrix}$

links-/rechts-zirkular polarisiert

($\underline{B}$ läuft dem $\underline{E}$-Vektor um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben nach bzw. vor)