$$G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\delta\left(t-t'-\dfrac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) & t>t' \\ 0 & t<t' \end{cases}$$

<u>retardierte Green'sche Fkt.</u> (kausal)

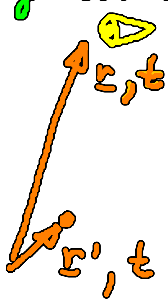
ist die Lösung der Wellengl.

$\Box\phi(\underline{r},t) = -\dfrac{\rho(\underline{r},t)}{\epsilon_0}$ zu einer punktförmigen Ladungsdichte $\rho/\epsilon_0 = \delta(\underline{r}-\underline{r}')\delta(t-t')$ am Ort $\underline{r}'$ zur Zeit t'.

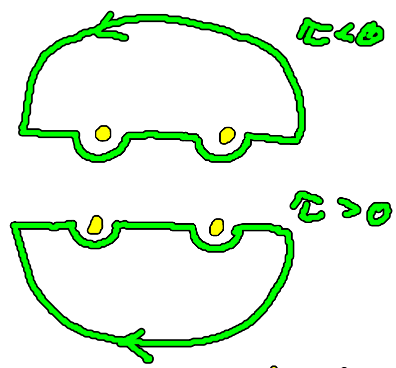
Eigenschaften: (i) Kausalität

(ii) Ausbreitung der Punktstörung als <u>kugelförmige Wellenfront</u> mit Phasengeschw. c

$|\underline{r}-\underline{r}'| = c(t-t')$



<u>NB</u>: Für den Integrationsweg



erhält man die <u>avancierte Greenfkt.</u> ($=0$ für $t>t'$), die eine einlaufende Kugelwelle beschreibt, welche sich auf den Punkt $\underline{r}'$ zur Zeit t' zusammenzieht.

• Mit $u(\underline{r},t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^{t} dt' \, \dfrac{\delta\left(t-t'-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} f(\underline{r}',t')$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{f\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{4\pi |\underline{r}-\underline{r}'|} \quad \text{folgt}$$

Ret. Potenziale für bel. $\rho(\underline{r},t)$, $\underline{j}(\underline{r},t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \phi(\underline{r},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\rho\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \\ \underline{A}(\underline{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\underline{j}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \end{aligned}}$$

ϕ, $\underline{A}$ sind bestimmt durch $\underline{r}'$ zu retardierten Zeiten

$t' = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$ $\Rightarrow$ endl. Ausbreitungsgeschw. der elektromagn. Wirkungen oder Felder mit c.

4.3 Multipolstrahlung

Ziel: Die retardierten Potenziale sollen für räumlich lokalisierte t-abh. Ladungs- u. Stromverteilungen analog zu den stat. Multipolentwicklungen (§1.4, 2.4) für $r \gg r'$ entwickelt werden.

Vor.: Lorenz-Eichung $\dot{\phi} + c^2 \underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0$ $\qquad \epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

$\Rightarrow$ $\underline{A}(\underline{r},t)$ ergibt $\phi(\underline{r},t)$ u. somit $\underline{E}(\underline{r},t)$, $\underline{B}(\underline{r},t)$

1. Näherung: $\boxed{r \gg a}$ (Ausdehnung der Quelle)

Mit $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}(\underline{r}\cdot\underline{r}') + \ldots$

$$\underline{A}(\underline{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \underline{j}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, (\underline{r}\cdot\underline{r}') \, \underline{j}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)$$

2. Näherung: $t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c} \approx \underbrace{t - \frac{r}{c}}_{=:\tau} + \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{cr} + \dots$

falls $\tau \gg \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{cr} \sim \frac{a}{c}$ (relative Retardierung innerhalb der Quelle)

$a \sim$ Ausdehnung der Quelle

$\tau \sim$ charakt. Retardierungszeit Beob. – Schwerpunkt der Quelle

(z.B. harmon. Erregung $\underline{j} \sim e^{i\omega t}$:

$\omega\tau \overset{!}{=} 2\pi \Rightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{ck} = \frac{\lambda}{c}$ Periode

$\boxed{a \ll \lambda}$ Wellenlänge

$$\Rightarrow \underline{j}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) \approx \underline{j}\left(\underline{r}', \underbrace{t - \frac{r}{c}}_{\tau}\right) + \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{cr}\frac{\partial \underline{j}(\underline{r}',\tau)}{\partial \tau}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{A}(\underline{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r}\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}',\tau) + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int d^3r'\,(\underline{r}\cdot\underline{r}')\left(1 + \frac{r}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\underline{j}(\underline{r}',\tau)}$$

niedrigste Ordnung (verschwindet nicht, da im Gegensatz zur Magnetostatik $\underline{\nabla}\cdot\underline{j} \neq 0$)

Mit $\underline{\nabla}_{r'}\cdot[x'_k \underline{j}] = x'_k \underbrace{(\underline{\nabla}_{r'}\cdot \underline{j}(\underline{r}',\tau))}_{-\dot{\varrho}(\underline{r}',\tau)} + j_k$ mit $\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \underline{\nabla}_{r'}\cdot(x'_k \underline{j}) \overset{\text{Gauß}}{=} 0$

folgt

$$\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}',\tau) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \underline{r}'\dot{\varrho}(\underline{r}',\tau) = \dot{\underline{p}}(\tau)$$

mit el. Dipolmoment $\underline{p} = \int d^3r'\, \underline{r}'\varrho(\underline{r}',\tau)$

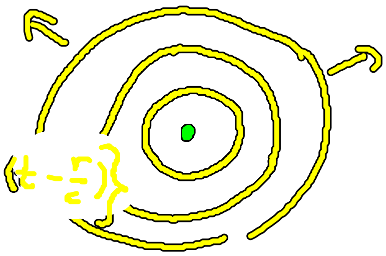
$$\Rightarrow \boxed{\underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\,\dot{\underline{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}$$ el. Dipolstrahlung

Hertzscher Dipol (H. Hertz 1857–1894):

$$\underline{p}(t) = \underline{p}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{-i\omega\mu_0 \underline{p}_0}{4\pi}\,\frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} = \frac{-i\omega\mu_0 \underline{p}_0}{4\pi}\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

Kugelwelle



$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\underline{r},t) \overset{\text{Lorenz-Eichung}}{=} -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underline{\nabla}\cdot\left\{\frac{1}{r}\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\}$$

$$\phi(\underline{r},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underline{\nabla}\cdot\left\{\frac{1}{r}\underline{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\} + \underbrace{\phi_{stat}(\underline{r})}_{0}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\underbrace{\frac{1}{cr^2}\underline{r}\cdot\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}_{\sim\frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{1}{r^3}\underline{r}\cdot\underline{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}_{\sim\frac{1}{r^2}}\right\}$$

Grenzfälle:

(i) **Fernzone** (Wellenzone): $r \gg \lambda\ (\gg a) \Leftrightarrow \boxed{kr \gg 1}$

$$\boxed{\phi(\underline{r},t) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{cr^2}\,\underline{r}\cdot\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$

$\Leftrightarrow \frac{\omega}{c} r \gg 1$

$\frac{1}{c}\dot{p} \sim \frac{\omega}{c} p \gg \frac{p}{r}$

Retardierung wichtig!

(ii) **Nahzone** (quasistatischer Bereich): $\lambda \gg r\ (\gg a)$ $\boxed{kr \ll 1}$

$$\boxed{\phi(\underline{r},t) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^3}\,\underline{r}\cdot\underline{p}(t)}$$

$\left(-\frac{1}{r^3}\frac{r}{c}\underline{r}\cdot\dot{\underline{p}}(t) + \frac{1}{cr^2}\underline{r}\cdot\dot{\underline{p}}(t)\right)$

Retardierung komp. $\dot{p}$-Term

instantanes Dipolpotenzial!

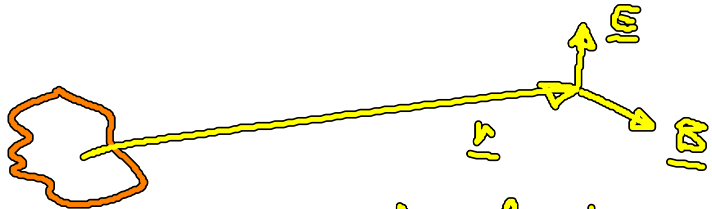
Berechnung der Felder in Fernfeldnäherung:

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \underline{\nabla}\times\underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\underline{\nabla}\times\left(\frac{1}{r}\,\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi c}\,\frac{1}{r^2}\left[\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\underline{r}\right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\underline{E}(\underline{r},t) = -\underline{\nabla}\phi - \dot{\underline{A}}(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{1}{r^3}\left[\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\underline{r}\right]\times\underline{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Es gilt: $\underline{B}\times\left(\frac{\underline{r}}{r}\right) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi c}}_{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}}\,\frac{1}{r^3}\left(\ddot{\underline{p}}\times\underline{r}\right)\times\underline{r} = \frac{1}{c}\underline{E}$



$\underline{r}, \underline{E}, \underline{B}$ bilden Rechtssystem

Ausbreitung wie freie Kugelwelle
(nur in der Fernzone!)

<u>NB</u>: In der Nahzone gilt immer noch $\underline{B}\perp\underline{r}$
<u>aber</u> E hat <u>longitud.</u> Komp. $\underline{E}_{\parallel} \parallel \underline{r}$
neben $\underline{E}_{\perp}\perp\underline{r}$