Wellenausbreitung in Materie:

$$\boxed{\Delta \underline{E} - \frac{1}{c_M^2}\left(\ddot{\underline{E}} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}\dot{\underline{E}}\right) = 0}$$

$$c_M = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$$

$\tau = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma}$ diel. Relax.zeit

$$\underline{E} \sim e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

$$\boxed{k^2 = \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i\frac{1}{\omega\tau}\right)}$$ Disp.-Rel.

$$k = \frac{\omega}{c}\tilde{n} = \frac{\omega}{c}(n + i\gamma)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{lll} \mathrm{Re}: & n^2 - \gamma^2 & = \varepsilon\mu \\ \mathrm{Im}: & n\gamma & = \frac{\varepsilon\mu}{2\omega\tau} \end{array}\right\} \Rightarrow n, \gamma$$

lin Polaris $\underline{E}_0 \parallel x_1 \Rightarrow \underline{B}_0 \parallel x_2 \Rightarrow \tan\varphi = \frac{\gamma}{n}$

Isolator $(\sigma = 0)$: $\tau \to \infty \Rightarrow \gamma = 0$, $\varphi = 0$
(ungedämpft) $\underline{E}, \underline{B}$ in Phase

reeller Brechungsindex $\boxed{n = \sqrt{\varepsilon\mu} \approx \sqrt{\varepsilon} > 1}$

$\Rightarrow$ Phasengeschw. $\frac{c}{n} < c$

Metall (σ groß) : $\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma} \ll \frac{1}{\omega}$ (für alle ~~Frequ.~~ bis UV)

Disp.rel.

$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(n^2 - \gamma^2 + 2in\gamma) \approx \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\mu \frac{i}{\omega\tau}$

$\Rightarrow n^2 - \gamma^2 \approx 0$

$n\gamma \approx n^2 \approx \gamma^2 \approx \frac{\epsilon\mu}{2\omega\tau} \Rightarrow \boxed{n = \gamma \approx \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2\omega\tau}}}$

$\tan\varphi = \frac{\gamma}{n} \approx 1 \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\pi}{4}}$

Extinktionskoeff. $d = \frac{c}{\omega\gamma} \sim$ cm für 100 Hz

(hochfrequente Wellen dringen nicht in Metall ein — Skineffekt)

Grund: Verschiebungsstrom $\ll$ Leitungsstrom

b) Dielektrische Dispersion (Ann. $\mu = 1$)

Betrachte nun zeitliche Dispersion, d.h. $\hat{\chi}(\omega)$:

$$\boxed{\hat{\underline{P}}(\omega) = \epsilon_0 \hat{\chi}(\omega)\hat{\underline{E}}(\omega)}$$

mit $\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \chi(t)\, e^{i\omega t}$ (dynam. el. Suszept.)

Fourier-Trafo: $\underline{P}(\underline{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \hat{\underline{P}}(\underline{r},\omega)\, e^{-i\omega t}$

$$\hat{\underline{E}}(\underline{r},\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \underline{E}(\underline{r},t)\, e^{i\omega t}$$

$$\rightarrow \underline{P}(\underline{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \epsilon_0 \hat{\chi}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \underbrace{e^{i\omega(t'-t)}}_{\chi(t-t')}\, \underline{E}(\underline{r},t')$$

$$= \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} dt'\, \chi(t-t')\, \underline{E}(\underline{r},t')$$

(Nachwirkungseffekt: Faltungsintegral)

NB: **Kausalität** verlangt $\boxed{\chi(t-t') = 0 \text{ für } t' > t}$

Aus mikroskop. Modellen folgt i.a. ein komplexes $\hat{\chi}(\omega) \in \mathbb{C}$

$\Longrightarrow$ komplexe diel. Funktion:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \hat{\chi}(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega) \quad \text{mit} \quad \epsilon', \epsilon'' \in \mathbb{R}$$

aus $\epsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt\, \chi(t)\, e^{i\omega t}$ folgt

$$\boxed{\epsilon^*(\omega) = \epsilon(-\omega)} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \epsilon'(\omega) &= \epsilon'(-\omega) \\ \epsilon''(\omega) &= -\epsilon''(-\omega) \end{aligned}$$

monochromat. ebene Welle $\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{k^2 = \epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i\frac{1}{\omega\tau}\right)}$$

Isolator (dispersives Dielektrikum): $\boxed{k^2 \approx \epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}}$

$\tilde{n}(\omega) = n(\omega) + i\gamma(\omega)$ komplexer, frequenzabh. Brech. index

mit $\tilde{n}(\omega)^2 = \epsilon(\omega) \equiv \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} \epsilon'(\omega) &= n^2 - \gamma^2 \\ \epsilon''(\omega) &= 2n\gamma \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\left.\begin{aligned} \gamma &= \\ n &= \end{aligned}\right\} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} \mp \epsilon'\right)^{1/2}}$$

Abs.koeff. γ
reeller Brech.index n

(i) Absorption

a) $\epsilon'' = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} &\text{Abs.koeff. } \gamma = 0 \\ &\text{Brech.ind. } n = \sqrt{\epsilon'} \end{aligned}\right\}$ falls $\epsilon' > 0 \Longrightarrow$ ungedämpfte Welle

b) $\epsilon'' > 0 \Longrightarrow \gamma > 0$ (gedämpfte Welle) $\Longrightarrow$ Energie-dissipation

Der Frequenzbereich mit $\epsilon'' \ll \epsilon'$ heißt Transparenzgebiet der Substanz (wenig Absorption)

(ii) Dispersion

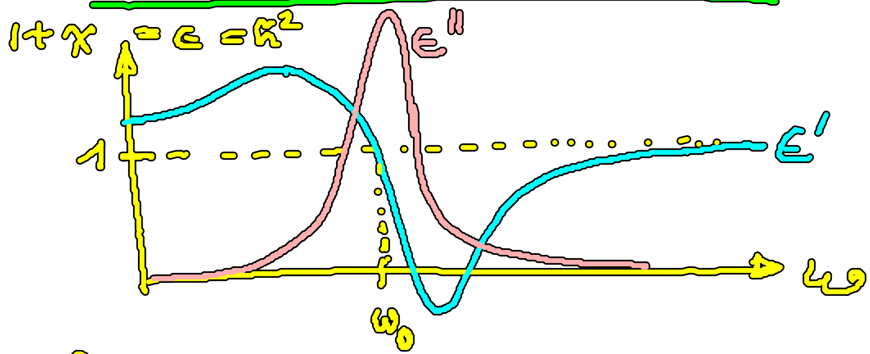
$\mathrm{Re}\, k \equiv k' = \frac{\omega}{c} n(\omega)$ nichtlin. Dispersion

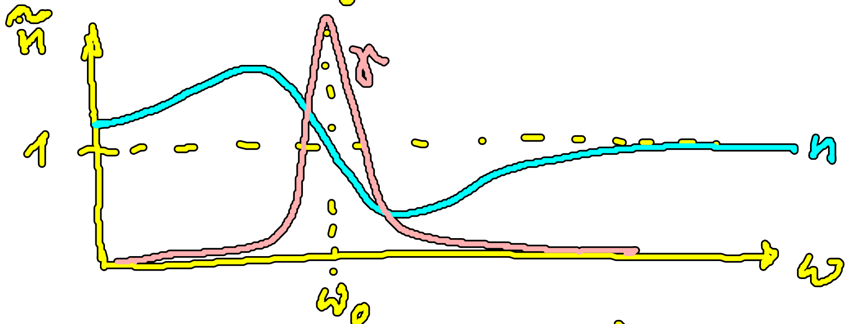
$\Rightarrow$ Gruppengeschw. $v_g := \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}} = \frac{c}{\frac{d(\omega n)}{d\omega}}$

$$\boxed{v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} \neq \frac{c}{n(\omega)} = v_{ph}}$$

Phasengeschw.

Typ. Frequenzabhängigkeit (Resonanzverh.)





normale Dispersion : $\frac{dn}{d\omega} > 0$ (stets im Transparenzgebiet)

$\epsilon'' \approx 0$, $v_g < v_{ph}$

anomale Dispersion : $\frac{dn}{d\omega} < 0$ (bei Absorption)

Ref.: Louis de Broglie : Wave propagation

Beziehungen zwischen $\epsilon'(\omega)$ und $\epsilon''(\omega)$:

(Kramers-Kronig-Relationen)

- Allg. gültiger Zus.hang zwischen Dispersion ($n(\omega)$) und Absorption ($\kappa(\omega)$) erlaubt z.B. Berechnung der Dispersionsbez. aus dem Absorptionsspektrum und umgekehrt!
- Folgt aus dem Kausalitätsprinzip!

Beweis (Methode Funktionentheorie)

Für eine kausale Fkt. $\chi(t)$ gilt:

$$\chi(t) = \theta(t)\,\chi(t) \quad \text{mit} \quad \theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t<0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Heaviside-Fkt.

Fourier-Trafo:

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\ \hat{\theta}(\omega-\omega')\,\hat{\chi}(\omega')$$

$$\hat{\theta}(\omega) := \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt\ e^{i\omega t - \sigma t}$$

(konvergenzerzeugender Faktor $e^{-\sigma t}$)

$$= \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{1}{i\omega - \sigma}$$

$$\Rightarrow \hat{\chi}(\omega) = \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, \frac{1}{\omega'-\omega-i\sigma}\,\hat{\chi}(\omega')$$