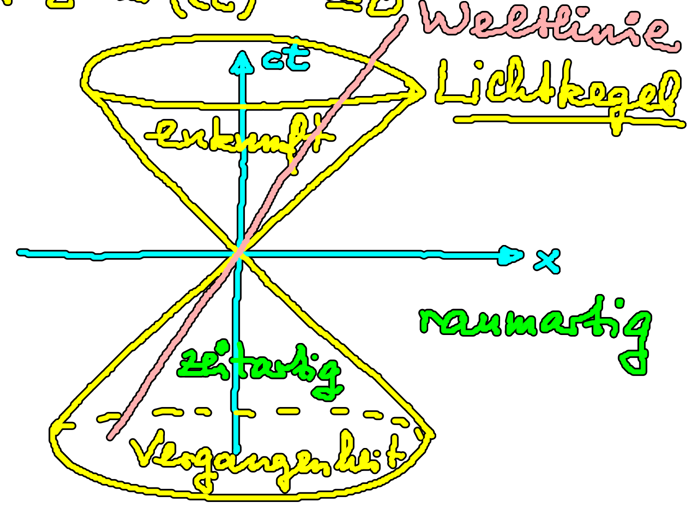
6.2 Vierervektoren und Minkowski-Raum

Geometrische Veranschaulichung von Ereignissen (x, y, z, t) im Raum-Zeit-Kontinuum (Minkowski-Raum):

Die Lorentz-Trafo läßt $x^2+y^2+z^2-(ct)^2$ invariant.

Lichtkegel: $x^2+y^2+z^2-(ct)^2=0$



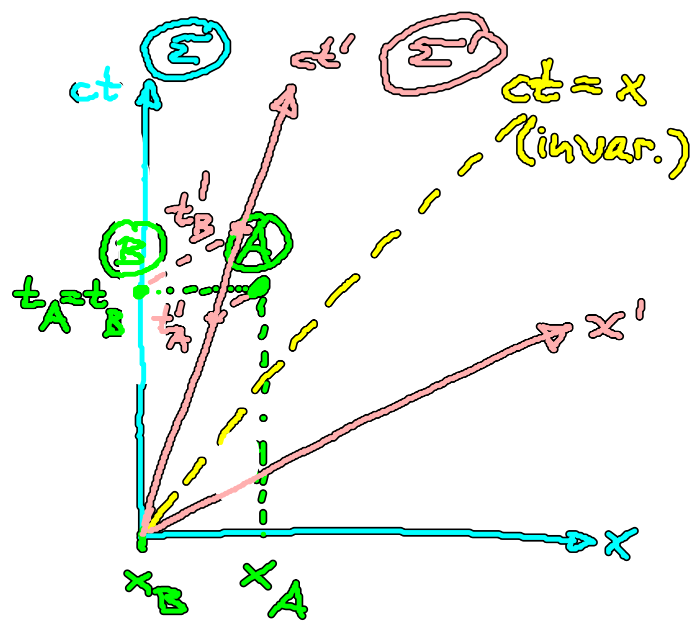
Die Bewegung eines Massenpktes ergibt im Minkowski-Raum (ct, x, y, z) eine Weltlinie.

Bei konst. Geschw. $x=\beta \cdot ct$ gerade (wegen $\beta<1$ innerhalb des Lichtkegels)

Gleichzeitigkeit

Zwei Ereignisse A, B an Orten x_A, x_B seien gleichzeitig in Σ.

Im Lorentz-transformierten Inertialsystem Σ'



$$\left(\begin{array}{l} x'\text{-Achse}: t' = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\beta} ct \\ \qquad \Rightarrow ct = \beta x < x \\ ct'\text{-Achse}: x' = 0 \Rightarrow x = \beta ct \\ \qquad \Rightarrow ct = \frac{1}{\beta} x > x \end{array}\right)$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$t' = \gamma\left(t - x\frac{v}{c^2}\right)$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

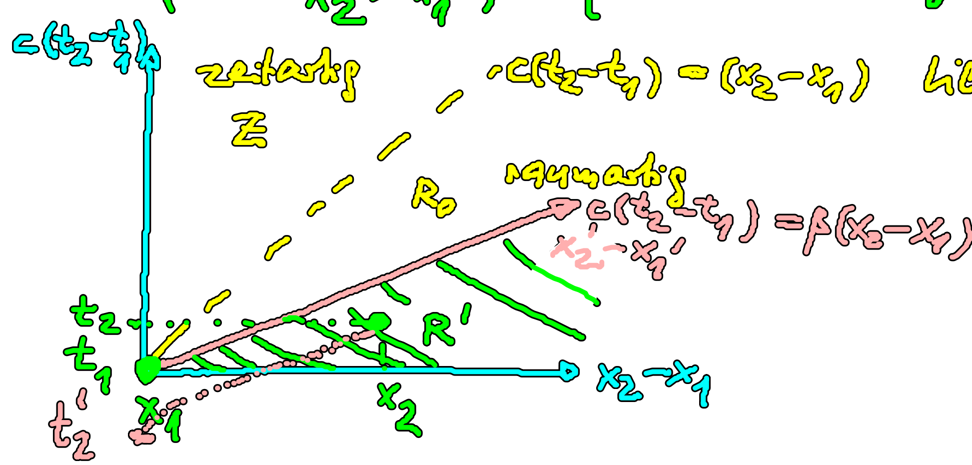
sind sie <u>nicht mehr gleichzeitig</u>

Kausalitätsprinzip

Reihenfolge zweier Ereignisse an den Orten x_1, x_2 in Σ:
$$t_1 < t_2$$

Reihenfolge in Σ':
$$t_2' - t_1' = \gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right] \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{falls } c(t_2-t_1) > \beta(x_2-x_1) \\ \quad " \qquad " \qquad < \quad " \end{array}$$

Für <u>raumartige</u> Ereignisse $c(t_2-t_1) < (x_2-x_1)$ läßt sich eine Lorentz-Trafo finden, so dass beide Ereignisse gleichzeitig sind $\left(\beta = \frac{c(t_2-t_1)}{x_2-x_1}\right)$ oder die Reihenfolge sogar umgedreht wird $\left(\beta > \frac{c(t_2-t_1)}{x_2-x_1}\right)$ für alle Ereignisse $(x_2, t_2) \in R'$



Aber

- Nur zeitartige Ereignisse können sich kausal beeinflussen, da eine Signalübertragung mit $v \leq c$ möglich ist; deren Reihenfolge wird nicht geändert, also kein Widerspruch zum Kausalitätsprinzip.

- Raumartige Ereignisse können sich nicht kausal beeinflussen.

Formalisierung der Weltlinien

Der raum-zeitliche Abstand ds

$$(ds)^2 := (c\,dt)^2 - (d\underline{r})^2$$

bleibt invariant bei Lorentz-Trafo zwischen Inertialsystemen.

Schreibe $(ds)^2$ als Skalarprodukt von Vierervektoren (Zeit-Ort) im Minkowski-Raum V und stelle die Lorentz-Trafo als lineare orthogonale Trafo in V dar, die das Skalarprodukt invariant läßt:

Def.: kontravariante Komponenten des Vierervektors

$x^0 := ct$

x^i, $i = 1,2,3$: kartes. Komp. des Ortsvektors $\underline{r}$

$$\Rightarrow (ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

nichteuklidisches Skalarprodukt!

(Euklid. Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit euklid. Metrik:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \underbrace{(x, y, z)}_{\text{Zeilenvektor}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{metrischer Tensor } g_{ij} = \delta_{ij} = (1)_{ij}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{Spaltenvektor}}$$

hier:

nichteuklid. Raum V, metr. Tensor:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit läßt sich schreiben

$$(ds)^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \underbrace{\sum_{\nu=0}^{3}}\, dx^\mu \underbrace{g_{\mu\nu}\, dx^\nu}$$

Vereinfachung durch $dx_\mu := \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} dx^\nu$

Def.: kovariante Komponenten der Vierervektors

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &:= x^0 \\ x_i &:= -x^i \end{aligned}} \quad i = 1, 2, 3$$

$$\boxed{\begin{aligned} (ds)^2 &= dx^0 dx_0 + dx^1 dx_1 + dx^2 dx_2 + dx^3 dx_3 \\ &= \sum_{\mu=0}^{3} dx^\mu dx_\mu \equiv \underbrace{dx^\mu dx_\mu}_{} \end{aligned}}$$

Einstein'sche Summationskonvention: wenn Index oben (kontravar.) und unten (kovar.) auftritt.

Verallgem. auf beliebige Vierervektoren a^i

$$\boxed{a_0 = a^0 \;, \quad a_i = -a^i} \quad (i=1,2,3)$$

Alle Lorentz-Invarianten lassen sich als Skalarprodukte $a^\mu a_\mu$ schreiben.

Zeitartige Vierervektor: $x^\mu x_\mu > 0$
(alle von O erreichbaren Weltvektoren)

Raumartige Vierervektoren: $x^\mu x_\mu < 0$

Lorentz-Trafo (linear, homogen): $\Sigma \to \Sigma'$

$$\boxed{x'^\mu = U^{\mu}{}_{\nu}\, x^\nu}$$

Zeile Spalte

mit $U^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(v \parallel x^1)$

$$x'_\mu = g_{\mu\lambda} x'^\lambda = \underbrace{g_{\mu\lambda} U^\lambda{}_\kappa g^{\kappa\nu}}_{U_\mu{}^\nu} x_\nu \,, \quad U_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$