6.6 Eichinvarianz und Ladungserhaltung

Wirkungsintegral $W = \underbrace{-m_0 c \int_1^2 ds}_{\substack{W_t \\ \text{(Teilchen)}}} \; \underbrace{- \frac{q}{c} \int_1^2 dx_i \phi^i}_{\substack{W_{tf} \\ \text{(Teilchen-Feld-WW)}}}$

Verallgemeinerung auf kontinuierliche Massendichte $\mu(x^i)$:

$$\boxed{W_t = -c \int d^3r \, \mu \int_1^2 ds = - \int_\Omega d\Omega \, \mu \frac{ds}{dt}}$$

$d\Omega := d^3r \, c dt = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ Volumenelement im Minkowski-Raum

(i) $d\Omega$ ist eine Lorentz-Invariante, da das Volumen unter orthog. Transf. $U^i{}_k$ erhalten wird.

(ii) Aus $\underline{dm_0} dx^i = \frac{\mu}{c} \frac{dx^i}{dt} \underline{d^3r} \, c dt = \frac{1}{c} \mu \frac{dx^i}{dt} d\Omega$ folgt, dass 4-Massenstromdichte

$\mu \frac{dx^i}{dt} \equiv g^i$ ein 4-Vektor ist, da dm_0, $d\Omega$ Lorentz-Skalare (nicht Lorentz-invariant: μ, dt)

(iii) $\underbrace{\mu^2 \frac{dx^i dx_i}{dt^2}}_{g^i g_i} = \left(\mu \frac{ds}{dt}\right)^2$ ist Lorentz-Inv.

also auch $\mu \frac{ds}{dt}$

$\Rightarrow$ W_t ist Lorentz-Invariante.

WW einer kontinuierlichen Ladungsdichte $\varrho(x^i)$ mit Feld:

$$W_{tf} = -\frac{1}{c}\int d^3r\,\varrho \int dx_i\,\phi^i$$

$$= -\frac{1}{c^2}\int \underbrace{d^3r\,c\,dt}_{d\Omega}\;\underbrace{\varrho\frac{dx_i}{dt}}_{j_i}\phi^i$$

mit 4-Ladungsstromdichte j_i

$$\left(\begin{array}{ll} j^0 := \varrho\frac{dx^0}{dt} = c\varrho & \\ j^\alpha := \varrho v^\alpha & \alpha = 1,2,3 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{W_{tf} = -\frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, j_i\phi^i}$$

Also $W = \int_\Omega d\Omega\,\mathcal{L}(x^i)$ mit der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} := -\mu\frac{ds}{dt} - \frac{1}{c^2}j_i\phi^i \qquad d\Omega \equiv d^4x$$

Umeichung

$$\tilde{\phi}^i = \phi^i + \partial^i\varphi$$

$$\tilde{W}_{tf} = -\frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, j_i\tilde{\phi}^i = -\frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, j_i(\phi^i + \partial^i\varphi)$$

$$= W_{tf} - \frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, j_i \underbrace{\partial^i \varphi}_{\partial^i(\varphi j_i) - \varphi(\partial^i j_i)}$$

$$= W_{tf} - \underbrace{\frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, \partial^i(\varphi j_i)} + \frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, \varphi(\partial^i j_i)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, c \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{c\,\partial t}(\varphi c \rho)} - c\int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, \underline{\nabla}\cdot(\varphi \underline{j})}_{\oint d\underline{f}\,\varphi\,\underline{j} = 0}$$

weglassen, da Var. bei t_1, t_2 verschwindet $\longleftarrow \left[\varphi\rho\right]_{t_1}^{t_2}$

$$\Rightarrow \tilde{W}_{tf} = W_{tf} + \frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, \varphi \underbrace{(\partial^i j_i)}_{0 \text{ wegen Ladungserhaltung}}$$

Fazit: Äquivalenz zwischen Eichinvarianz $\tilde{W}_{tf} = W_{tf}$ bzw. Lagrangedichte $\mathcal{L}$ und Ladungserhaltung $\partial^i j_i = 0$

6.7. Inhomogene Maxwell-Gleichungen aus dem Wirkungsprinzip

Die Beweg.gl. für ein Teilchen im Feld F^{ik}

$$\frac{d}{ds} p^i = \frac{q}{c} F^{ik} u_k$$

sowie die homogenen Maxwellgln.

$$\epsilon_{iklm} \partial^k F^{lm} = 0 \quad (\text{wegen } F^{lm} = \partial^l \phi^m - \partial^m \phi^l)$$

ergeben sich aus den Wirkungsintegralen

$$W_t + W_{tf} = \int_\Omega d\Omega \left\{ -\mu \frac{ds}{dt} - \frac{1}{c^2} j_i \phi^i \right\}$$

Teilchen Teilchen-Feld-WW

durch Var. der Bahn bei geg. Potenzialen $\phi^i(x^j)$.

Vermutung:
Erzeugung von Feldern durch Ladungen (d.h., die inhomog. Maxwell-Gln. ergebenen sich durch Variation der Felder bzw. Pot. bei geg. Bahnen

Frage: Lagrangedichte $\mathcal{L}_f$ zur Beschreibung der Dynamik der Felder?

Ansatz: $W_f = \int_\Omega d\Omega \, \mathcal{L}_f(F^{ik}, \phi^i)$

Forderungen: (i) Feldgln. linear $\Rightarrow \mathcal{L}_f$ bilinear in F^{ik}, ϕ^i

(ii) Eindeutige Determinierung durch F^{ik}
$\Rightarrow$ keine Ableitung $\partial^l F^{ik}$

(iii) Eichinvarianz $\Rightarrow \phi^i \phi_i$ darf nicht auftreten

(iv) Lorentzinvar.

$$\Longrightarrow \mathcal{L}_f = -\alpha F^{ik} F_{ik}$$

$$\boxed{W = \int d\Omega \left\{ \underbrace{-\mu \frac{ds}{dt}}_{W_t} \underbrace{- \frac{1}{c^2} j_i \phi^i}_{W_{tf}} \underbrace{- \alpha F^{ik} F_{ik}}_{W_f} \right\}}$$

<u>Variation</u> für feste Bahn (d.h. festes j_i):

$$\delta W = \int d\Omega \left\{ -\frac{1}{c^2} \underbrace{j_i \delta\phi^i}_{j^i \delta\phi_i} - \alpha \underbrace{\delta(F^{ik} F_{ik})}_{(\delta F^{ik}) F_{ik} + F^{ik}(\delta F_{ik}) = 2F^{ik}\delta F_{ik}} \right\}$$

$$\underbrace{(\delta F^{ik}) F_{ik}}_{(\delta F_{ik}) F^{ik}}$$

Mit $\delta F_{ik} = \delta(\partial_i \phi_k - \partial_k \phi_i) = \partial_i \delta\phi_k - \partial_k \delta\phi_i$

$$2F^{ik}\delta F_{ik} = \underbrace{2F^{ik}\partial_i \delta\phi_k}_{\substack{2F^{ki}\partial_k \delta\phi_i \\ = -2F^{ik}\partial_k \delta\phi_i}} - 2F^{ik}\partial_k \delta\phi_i = -4F^{ik}\partial_k \delta\phi_i$$

$$\Rightarrow \delta W = \int d\Omega \left\{ -\frac{1}{c^2} j^i \delta\phi_i + 4\alpha F^{ik}\partial_k \delta\phi_i \right\}$$

[Mit dem verallg. gaußschen Satz (in 4 Dim)

$$\int_\Omega d\Omega\, \partial_k (F^{ik}\delta\phi_i) = \int_{\partial\Omega} df_k F^{ik}\delta\phi_i = 0$$

$\partial\Omega$ (3-dim. Rand des 4-dim. Vol.

$\Omega = \mathbb{R}^3 \times [t_1, t_2]$, $F^{ik} \underset{x^\alpha \to \infty\,(\alpha=1,2,3)}{\longrightarrow} 0$

$\delta\phi_i \big|_{t_1, t_2} = 0$]

wird

$$\int d\Omega\, F^{ik}\partial_k \delta\phi_i = \underbrace{\int d\Omega\, \partial_k (F^{ik}\delta\phi_i)}_{0} - \int d\Omega\, (\partial_k F^{ik})\delta\phi_i$$

also

$$\delta W = \int_\Omega d\Omega \left\{ -\frac{1}{c^2} j^i - 4\alpha (\partial_k F^{ik}) \right\} \delta\phi_i \overset{!}{=} 0$$

für bel. $\delta\phi_i$

$$\Longrightarrow \quad \partial_k F^{ik} = -\frac{1}{4\alpha c^2} j^i$$

$$\Longrightarrow \quad \partial_k F^{ki} = \frac{1}{4\alpha c^2} j^i$$

Wahl der Einheiten: $\alpha = \frac{\varepsilon_0}{4c}$:

$$\boxed{\partial_i F^{ik} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^k}$$

inhomogene Maxwell-Gln.

Interpretation der Lagrangedichte der Felder

$$W_f = \int_\Omega d\Omega \, \mathcal{L}_f \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}_f = -\frac{\varepsilon_0}{4c} F^{ik} F_{ik} = \frac{\varepsilon_0}{4c} F^{ik} F_{ki}$$

$$= \frac{1}{2c} \left(\underline{E} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{H} \right) \qquad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

$$\neq \quad u = \frac{1}{2} \left(\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H} \right) \quad \text{Energiedichte}$$

Analogie: $q, \dot{q}$
(harmon. Pot.)
in der Mech.

$$E = \frac{m}{2} \dot{q}^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 = T + V$$

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 q^2 = T - V$$