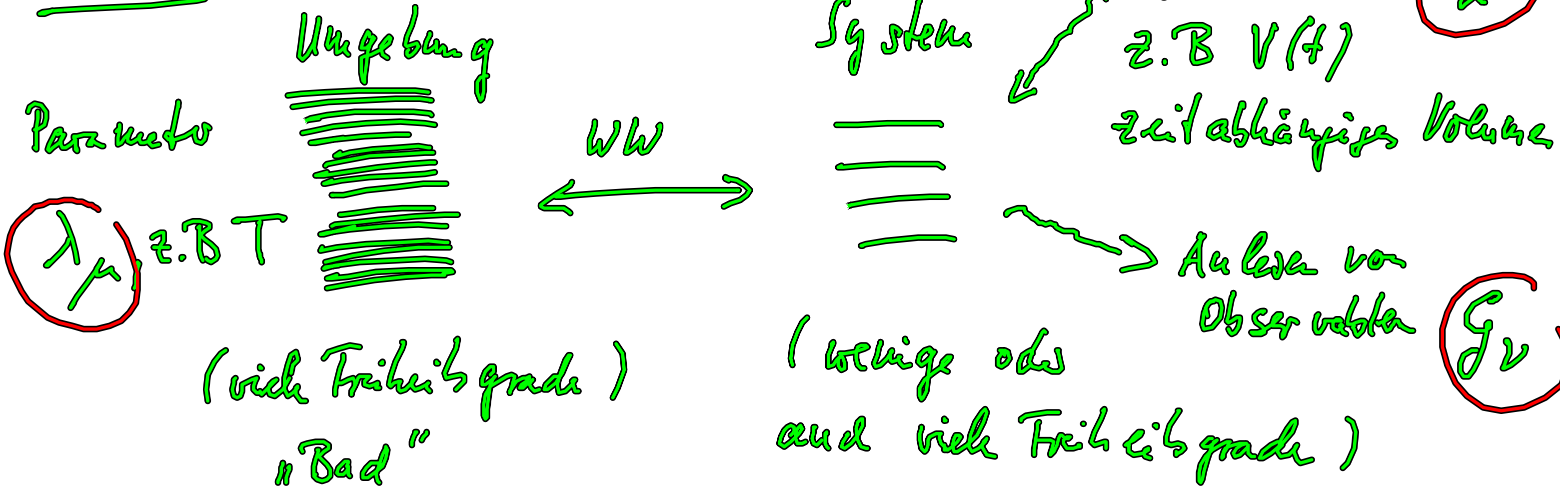
Statistische Physik

1. Einführg.

1.1. Konzepte der statistischen Physik

Statistik beschäftigt sich mit Vielteilchensystemen, die so viele Freiheitsgrade haben, daß es nicht einmal mögl. wäre die (leider unbekannte) Lösungen für das System aufzuschreiben

Ansatz:



System: dafür interessieren Sie sich

Konzept mit Vielteilchensystemen umzugehen:

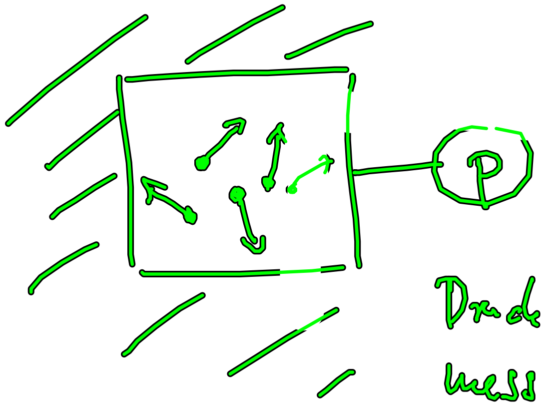
Die statistische Physik reagiert auf den Mangel an Information (Vielteilchensystem nicht wirklich beschreibbar) durch einen Mangel an Fragen!

Bsp. Druck des Gases (Frage!)

Mangel an Info: Bahnkurven unbekannt

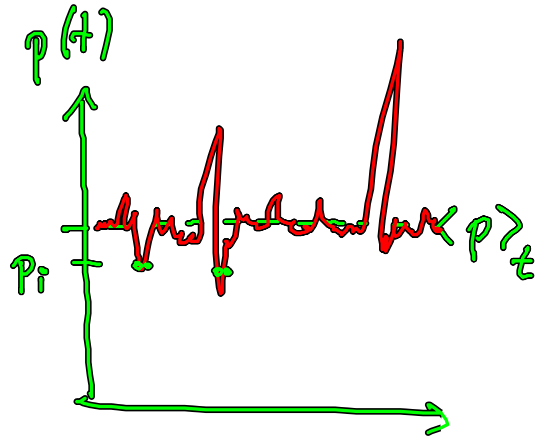
Kosten eines solchen Vorgehens: man bezahlt die wenigen Fragen die man stellt mit den Schwankungen der Meßgrößen.

Gas (klassisch):

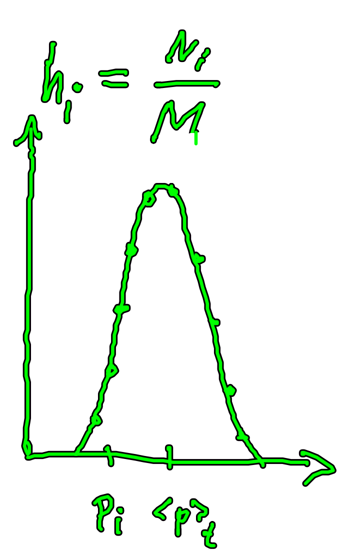


Druck-messung

Umgebung: Kasten



$\langle p\rangle_t$ = zeitlicher Mittelwert



$\langle p\rangle_E$ = Ensemble-Mittelwert

$N_i \sim$ Anzahl der Druckwerte p_i

$M \sim$ Gesamtzahl der Werte p_i

$$\langle p\rangle_t = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} p(t_i) = \frac{1}{A}\sum_{\substack{\text{alle Stöße}\\ \text{der Teilchen}\\ (j)}} F_j(t_i)$$

A: Fläche

$$h_i = \frac{N_i}{M} = \frac{\text{Anzahl der Momentaufnahmen zum Wert } p_i}{\text{Gesamtzahl aller Momentaufnahmen}}$$

wenn von der Zeitfolge abstrahiert wird,
so kann man für $M \to \infty$, h_i als Wahrscheinlichkeit w_i definieren, den Wert p_i im System zu finden

$$\langle p \rangle_E = \sum_i w_i \, p_i$$

Man hat also 2 Mgl. Mittelwerte der Observablen des Systems zu bestimmen:

a) Observable über M-Zeitpunkte zu mitteln (1 System)

b) Observable über M Systeme mitteln (1 Zeitpkt)

<u>Hoffnung:</u> $\langle p \rangle_E = \langle p \rangle = \langle P \rangle_t$

wird in der Ergodenhypothese formuliert.

(nach Ehrenfest gilt f. die klassische Mechanik:
wenn die Kurven eines Systems im Phasenraum

jeden Punkt der Fläche E = konstant beliebig nahe kommt so gilt die Ergodenhypothese;

Stöße sind oft Voraussetzung f. Gültigkeit der Ergodenhypothese)

Hauptaufgabe der statist. Physik

Ableitung v. Gesetze f. makroskopische Systemvariable unter dem Einfluß der Umgebung und externer Felder.

Die Ableitg. erfolgt auf Grundlage der Wahrscheinlichkeiten w_i mit denen mikroskopischen Zustände $|\Psi_i\rangle$ des Systems (ohne Umgebung) angenommen werden bestimmt mit Umgebung.

1.2. Kurzer historischer Weg – Sie lernen schon was

≙ Überblick über VL, nur rückwärts

- A. Avogadro (1776 - 1856) hat als einer der ersten so etwas wie die ideale Gasgleichung aufgeschrieben:

$$p \cdot V = N \cdot k\, T$$

N - Teilchenzahl, T - Temperatur

k - Boltzmannkonstante (stellt nur die Temperaturdef. eines Experimentators sicher)

- Abschätzungen zur Zahl von Molekülen in typischen makroskopischen Volumina von J. Loschmidt (1821 - 1895) $\rightarrow 10^{23}$ Teilchen

- J. C. Maxwell (1831 - 1879) berechnet erstmalig die Geschwindigkeitsverteilg. der Teilchen in einem idealen Gas:

$$w(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \underbrace{e^{-\frac{m}{2}v^2/kT}}$$

welche Wahrscheinlichkeit habe ich beim reingreifen in ein Gas ein Teilchen mit $|\vec{v}| = v$ zu finden

legt einen Abschneideparameter $kT \mathrel{\hat{=}}$ thermische Energie fest.

- J. W. Gibbs (1839 – 1903) + andere

führen unabhängig von Gas Wahrscheinlichkeitsverteilungen recht allgemein ein.

$\{|\psi_i\rangle\}$ Systemzustände mit Energie ε_i treten mit Wahrscheinlichkeit $w_i \sim e^{-\varepsilon_i/kT}$ auf

- L. Boltzmann (1844 – 1906) u. andere

verbinden die Entropie S mit den w_i's und führe die Temperaturdef. über S ein:

$$S = S(N, E, V) = -k \sum_i w_i \ln w_i \qquad T^{-1} = \partial_E S$$

(E: Energie)

man verbindet die mikroskop. Größen (ε_i) mit T, eine makroskop. Größe

- neben der klassischen Statistik (Maxwell) gibt es Quantenstatistik

E. Fermi (1901–1954) → Fermionen (halbzahliger Spin)

N. Bose (1894–1955) → Bosonen (ganzzahliger Spin)

Was ist die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen im Zustand ψ_i mit ε_i zu finden?

$$f_{\varepsilon_i}^{F/B} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} \pm 1} \qquad F: +1 \quad B: -1$$

$\beta = \frac{1}{kT}$ Abkürzg. f. inverse thermische Energie

μ = chemisches Potential

So wie Temperatur Wärmeaustausch zw. System u. Umgebung charakterisiert, so charakterisiert μ den Teilchenaustausch.

Verfeinerungen jenseits $e^{-\varepsilon_i \beta}$ sind Quanteneffekte

<u>1 Bsp:</u> <u>klassisch:</u> $pV = NkT \xrightarrow{T \to 0} 0$, $p = 0$

<u>quantenmech.:</u> $pV \xrightarrow{T \to 0} \neq 0$ (Fermigas)

Druck v. qm. Fermionen verschwindet nicht bei $T = 0$ aufgrund von Unschärfe / Pauliprinzip „Fermidruck"

- es gilt Bosonen ohne Masse! ($\mu = 0$)

z.B. Photon sind masselose Bosonen

M. Planck (1858 - 1947) leitet 1900 die spektrale Energiedichte eines Strahlers ab

$$u(\omega) = \frac{16\pi^2\hbar}{c^2} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

typischer Bosonencharakter

- wichtige Beiträge zur Materialphysik durch

P. Debey (1884 - 1966) Theorie der Flüssigkeiten, und der spezifischen Wärme von Festkörpern

spezifische Wärmekapazität

<u>klassisch</u> $C_V(T) = 3kN \quad \forall T$

<u>quantenmech</u> $C_V(T \to 0) = V \frac{2\pi^2}{5(\hbar c_s)^3} T^3$

L.D. Landau (1908 - 1966) arbeitet auf dem

Gebiet der Transporttheorie / Ferromagnetismus

- Beschreibung von Stößen zwischen Teilchen bisher nicht diskutiert, einfachster Ansatz sind

Ratengleichungen:

$$\dot{f}_k = -\sum_l \Gamma_{k\to l} f_k + \sum_l \Gamma_{l\to k} f_l$$

„Ausstreurate Γ "–" " „Einstreurate"

Besetzungszahl (wie viele Teilchen sind im Mittel in Zustand k)

beschreibt die Dynamik aus einem Nichtgleichgewicht in einen Gleichgewichtszustand

- allgemeinster Zugang zu Statistik erfolgt über die von Neumann gleichung f. den statistischen Operator ρ

J. von Neumann (1903 - 1957)

Hamiltonian des Systems

$$i\hbar \dot{\rho} = [H, \rho]$$

Dynamik eines Quantensystems in Umgebung,

„Wahrscheinlichkeitsoperator“ ersetzt Schrödingergleichg.

VL nimmt Weg rückwärts