Zustandsgleichungen des idealen Gases aus Zustandssumme bzw J berechnet.

Folgerungen aus dem Erwartungswert $\bar{N} = \frac{V}{\lambda_{th}^3} \underbrace{e^{\beta\mu}}_{z \text{ „Virial"}}$

Teilchendichte: $n_0 = \frac{\bar{N}}{V}$

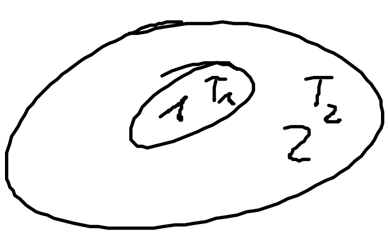
Bemerkungen zu dieser Gleichung:

- $\mu = kT \ln\left(n_0 \lambda_{th}^3\right)$

  Beziehung zwischen dem chemischen Potential und Teilchendichte

man kann das chemische Potential in Analogie zur Temperatur interpretieren

- Temperatur des Systems wird durch äußeres Wärmebad festgelegt



$T_1 = T_2$

1 ideales Gas
2 Wärmebad

- chemisches Potential des Systems wird durch äußere

Teilchenreservoir (Teilchenbad) festgelegt

$\mu_1 = \mu_2$

$\rightarrow n_1 = n_2$

$\leftrightarrow$ Teilchen u. Wärmeaustausch

war aus den Lösungen der Mastergleichung gewonnen

- wir sehen den Grenzfall klassische Physik an, denn wir haben den Spin weggelassen (Symmetrisierg. der Wellenfkt. vernachlässigt)

wissen aber auch, die Theorie kann nur für niedrige Dichte n_0 gut sein, denn sonst starker Teilchen-überlapp und Symmetrisierung wichtig!

- bisher: ideale Gasgleichg. kann nur für niedrige Dichte gelten – welche Dichte?

- werden später sehen, daß

$$\mu = kT \ln\left(n_0 \lambda_{th}^3\right)$$

$\swarrow$

Parameter der entscheidet, ob Dichte „klein" ist

$n_0 \lambda_{th}^3 \ll 1$ klassischer Grenzfall

$\underbrace{n_0 \lambda_{th}^3 \gg 1}$ extremes Quantenlimit

wird man sehen wenn Übergang vom Quantengas

→ klass. Gas angesehen wird (später)

das ist offensichtlich von Temperatur T abhängig,

denn : $\lambda_{th} \sim \dfrac{1}{T^{1/2}}$

<u>klassisch</u> : niedrige Dichte, große Temperaturen

<u>qm</u> : hohe Dichte, kleine Temperaturen (Metallelektronen) bei Zimmertemp.

- kann man weitere Information aus

$$\underline{\underline{\bar{N} = \frac{V}{\lambda_{th}^3} e^{\beta\mu}}} = \left(\int_0^\infty dn\, e^{-\beta\frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2mL^2}}\right)^3 e^{\beta\mu}$$

über Integral aus-
gerechnet

bekommen ?

umschreiben
$$= \int_0^\infty du_x\, e^{-\beta \frac{\pi^2 \hbar^2 u_x^2}{2mL}} \int_0^\infty du_y\, e^{-\beta \frac{\pi^2 \hbar^2 u_y^2}{2mL}} \int_0^\infty du_z\, e^{-\beta \frac{\pi^2 \hbar^2 u_z^2}{2mL}}\, e^{\beta\mu}$$

$$\bar{N} = \int du_x \int du_y \int du_z \; \underline{\underline{f_{n_x, n_y, n_z}}}$$

man zählt alle mittlere Teilchenzahlen $f_{u_x u_y u_z}$ in den „Einteilchenquantenzuständen" (u_x, u_y, u_z)

zusammen und bekommt die Gesamtteilchenzahl

man kann also $f_{u_x u_y u_z}$ als die Verteilung

der Teilchen auf die Quantenzustände $|u_x u_y u_z\rangle$ ansehen

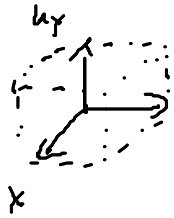
- versuche jetzt f. die $f_{u_x u_y u_z}$ die klassische Geschwindigkeitsverteilung $f|\vec{v}|$ zu konstruieren

$$\overline{N} = \int_0^\infty du_x \int_0^\infty du_y \int_0^\infty du_z \, \cdot = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} du_x \int_{-\infty}^{+\infty} du_y \int_{-\infty}^{+\infty} du_z \, \cdot$$

$|\vec{v}|$ irgendwie einführen

$$[0,\infty] \to [-\infty,+\infty]$$

$\frac{1}{8}$ des gesamten Raums:



← nur dieser Würfelbereich, es gilt also 8

$$= \frac{1}{8} \int d^3u \; e^{-\beta \frac{\pi^2 \hbar^2 u^2}{2mL^2}} e^{\beta\mu}$$

ganzer Raum

$u^2 = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)$

analog $\vec{u} \mathrel{\hat{=}} \vec{r}$

$x, y, z \mathrel{\hat{=}} u_x, u_y, u_z$

um auf Geschwindigkeiten zu kommen:

$$v_i = \frac{p_i}{m} = \frac{\hbar k_i}{m} = \frac{\hbar}{m} \frac{2\pi}{L} u_i \quad \hat{=} \text{ Quantisierungsbedingung im Kasten}$$

x, y, z Koordinate

damit kann man u_i in v_i umrechnen im Integral

$$\overline{N} = \frac{1}{8} \underbrace{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3} \int d^3k \; e^{-\frac{\beta \hbar^2 k^2}{8m}} e^{\beta\mu} \Big| \; k \to \frac{k}{2}$$

$$\int d^3n \mathrel{\hat{=}} \sum_n$$

$$\bar{N} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \, e^{-\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}} e^{\beta\mu}$$

$$= \left(\frac{L}{2\pi \hbar}\right)^3 \int d^3p \, e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} e^{\beta\mu}$$

$$\bar{N} = \left(\frac{L}{2\pi\hbar} m\right)^3 \int d^3v \, e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} e^{\beta\mu}$$

drückt die mittlere Teilchenzahl über eine Geschwindigkeitsverteilung aus.

3.13. Maxwellverteilung der Geschwindigkeit im idealen Gas

dazu Kugelkoordinaten

$$\bar{N} = \int dv\, v^2 \underbrace{4\pi}_{\text{Winkel-integral}} \left(m \frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \underbrace{n_0 \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}\right)^{3/2}}_{= e^{\beta\mu}\text{, aus}} e^{-\beta\frac{mv^2}{2}}$$

$$\bar{N} = \frac{V}{\lambda_{th}^3} e^{\beta\mu}$$

$$e^{\beta\mu} = n_0 \lambda_{th}^3 \quad , \quad \lambda_{th} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}}$$

man interpretiert jetzt $\bar{N} = \bar{N} \int dv\, f_v$ mit f_v

als die mittlere Zahl der Teilchen mit der Geschwindigkeit $|\vec{v}| = v$.

$$f_v = 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$$

ist sogenannte Maxwell-Geschwindigkeitsverteilung im idealen Gas. Beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilg. der Zufallsgröße v.

<u>Bemerkungen:</u>

a) Mittelwert von $\langle v \rangle$ berechnen:

$$\bar{N} = \int dv\, \underbrace{v^2\, \bar{N} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\beta\frac{mv^2}{2}}}_{\text{mittl. Teilchzahl mit Geschwindigkeit } v \quad n_v}$$

$$\langle v \rangle = \frac{\int dv\, v\, n_v}{\bar{N}} = \int dv\, v\, f_v$$

mittlere Geschwindigkeit pro Teilchen

Interpretation des oben geschriebenen Satzes

$$\langle v \rangle = \left(\frac{3kT}{m} \right)^{1/2}$$

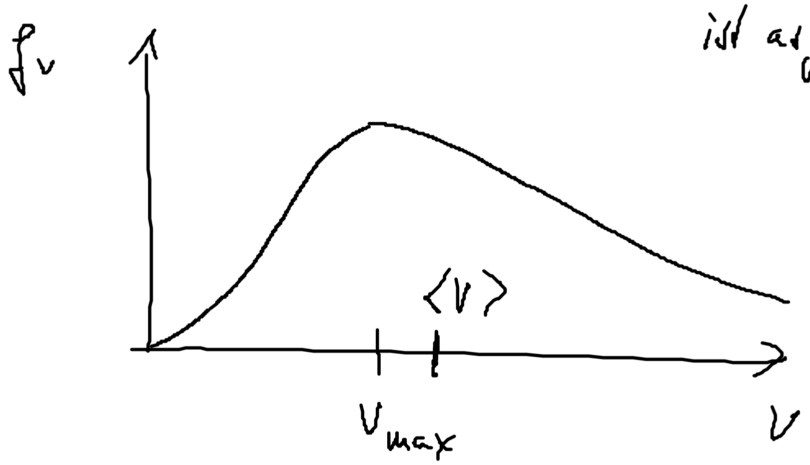
b) Maximalwert der Geschwindigkeitsverteilg.

$$v_{max} = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2}$$

(durch Ableitg. v. f_v und 0 setzen)

c) Darstellg. v. f_v:

ist asymmetrisch

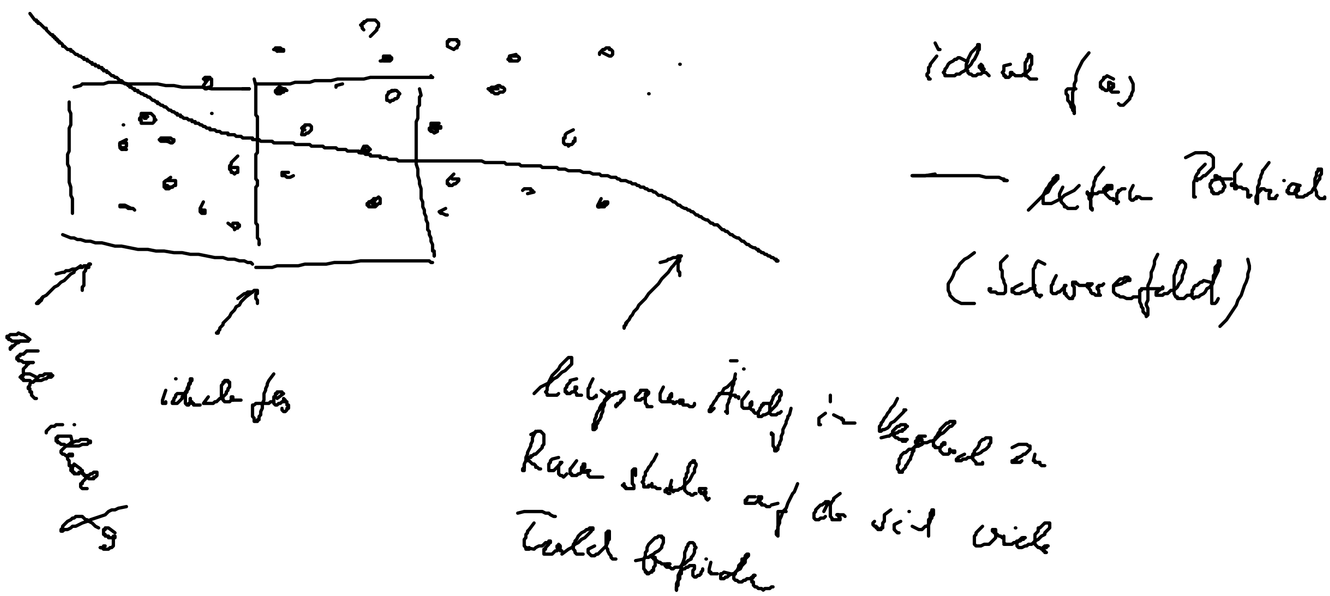


d) Zahl f. Kontakte System :

Sauerstoffmasse m, $kT = \frac{eV}{40}$ bei Zimmertemperatur

$$v_{max} \approx 400 \frac{m}{s}$$

3.1.4. Ideale Gase in räumlich schwach veränderlichen Feldern



Potential soll so schwach veränderlich sein, daß man in jedem Kasten nur 1 festen Potentialwert hat, die verschiedenen Kästchen können aber verschiedene Werte haben. Innerhalb eines Kastens merken alle Teilchen dasselbe Potential.

→ Teilchenzahl als Funktion des Potentials ($\vec{r}$) ansehen.

$$\bar{N} = -\frac{\partial J}{\partial \mu}$$, bereits gerechnet, wo $U(\vec{r})$ als Potential fehlte

$$\underset{\text{f. 1 Kasten}}{Z_{gk}} = \sum_{n, N_n} \langle n, N_n | e^{-\beta\left(H_0 + \overbrace{\sum_i U(\vec{r}_i)}^{\text{Teilchen im Kasten}} - \mu N\right)} | n, N_n \rangle$$

$$\sum_i U(\vec{r}_i) \simeq \sum_i \underset{\text{Position des Kastens}}{U(\vec{r})} = N\, U(\vec{r})$$

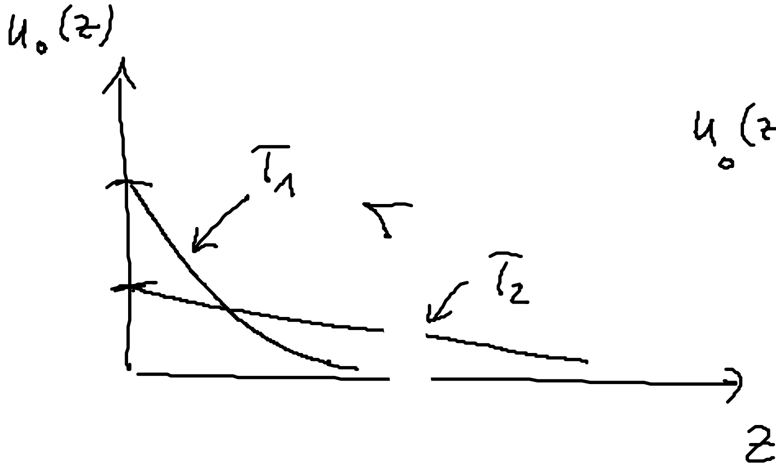
$$= \sum_{n, N_n} \langle n, N_n | e^{-\beta\left(H_0 - (\mu - U(\vec{r}))\, N\right)} | n, N_n \rangle$$

Alle bisherigen Formeln für das ideale Gas gelten weiter, wenn man $\mu \to \mu - U(\vec{r})$.

Beispiel: ideales Gas im Schwerefeld $U = mgz$

$$\frac{N}{V} \underset{\text{ideales Gas}}{=} \frac{e^{\beta(\mu - mgz)}}{\lambda_{th}^3} = \underset{\text{„z" neu}}{n_0(z)} = \underset{\text{Teilchendichte bei } z=0}{n_0}\, e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

Teilchendichte n_0 hängt jetzt vom Ort ab.



$$n_0(z) = n_0 \, e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

barometrische Höhenformel

Man erkennt ein Wechselspiel zwischen thermischer Energie kT und Gravitationsenergie mgz.

Für $T \to \infty$ gibt es eine Gleichverteilung

Für $T \to 0$ lokalisieren sich die Teilchen am Boden.