Zustandsgleichungen des idealen Gases aus Zustandssumme bzw. J berechnet.

Folgerungen aus dem Erwartungswert $\bar{N} = \frac{V}{\lambda_{th}^3} \underbrace{e^{\beta\mu}}_{z\ \text{„Virial"}}$

Teilchendichte: $n_0 = \frac{\bar{N}}{V}$

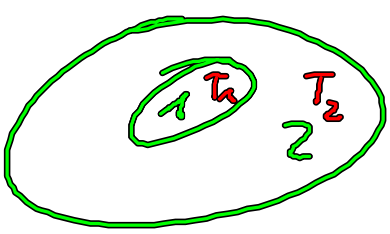
<u>Bemerkungen zu dieser Gleichung:</u>

- $\mu = kT \ln\left(n_0 \lambda_{th}^3\right)$

  Beziehung zwischen dem chemischen Potential und Teilchendichte

Man kann das chemische Potential in Analogie zur Temperatur interpretieren

- Temperatur des Systems wird durch äußeres Wärmebad festgelegt

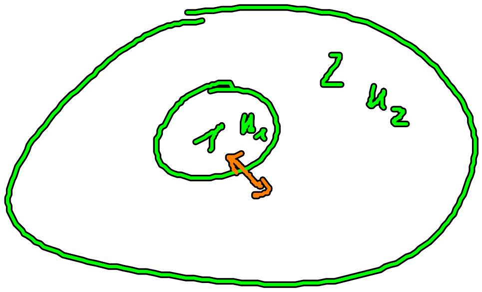


$T_1 = T_2$

1 ideales Gas
2 Wärmebad

- chemisches Potential des Systems wird durch äußeres

Teilchenreservoir (Teilchenbad) festgelegt



$\mu_1 = \mu_2$

$\rightarrow n_1 = n_2$

$\leftrightarrow$ Teilchen u. Wärmeaustausch

war aus den Lösungen der Materiegleichung gewonnen

- wir sehen den Grenzfall klassischer Physik an,
  denn wir haben den Spin weggelassen
  (Symmetrisierg. der Wellenfkt. vernachlässigt)

  wissen aber auch, die Theorie kann nur für niedrige Dichte n_0 gut sein, denn sonst starker Teilchenüberlapp und Symmetrisierung wichtig!

– bisher: ideale Gasgleichg. kann nur für niedrige Dichte gelten – welche Dichte?

– werden später sehen, daß

$\mu = kT \ln(n_0 \lambda_{th}^3)$

Parameter der entscheidet, ob Dichte „klein" ist

$n_0 \lambda_{th}^3 \ll 1$ klassischer Grenzfall

$n_0 \lambda_{th}^3 \gg 1$ extremes Quantenlimit

wird man sehen wenn Übergang vom Quantengas

→ klass. Gas angesehen wird (später)

das ist offensichtlich von Temperatur T abhängig,

denn: $\lambda_{th} \sim \frac{1}{T^{1/2}}$

klassisch: niedrige Dichte, große Temperaturen

qm: hohe Dichte, kleine Temperaturen (Metallelektronen) bei Zimmertemp.

- kann man weitere Information aus

$$\bar{N} = \frac{V}{\lambda_{th}^3} e^{\beta\mu} = \left(\int_0^\infty dn \, e^{-\beta \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2}} \right)^3 e^{\beta\mu}$$

über Integral aus-
gerechnet

bekommen?

umschreiben
$$= \int_0^\infty du_x\, e^{-\beta \frac{\pi^2\hbar^2 u_x^2}{2mL}} \int_0^\infty du_y\, e^{-\beta \frac{\pi^2\hbar^2 u_y^2}{2mL}} \int_0^\infty du_z\, e^{-\beta \frac{\pi^2\hbar^2 u_z^2}{2mL}}\, e^{\beta\mu}$$

$$\bar{N} = \int du_x \int du_y \int du_z \; f_{u_x, u_y, u_z}$$

man zählt alle mittleren Teilchenzahlen $f_{u_x u_y u_z}$ in den „Einteilchenquantenzuständen" $|u_x, u_y, u_z\rangle$ zusammen und bekommt die Gesamtteilchenzahl

man kann also $f_{u_x u_y u_z}$ als die Verteilung der Teilchen auf die Quantenzustände $|u_x u_y u_z\rangle$ ansehen

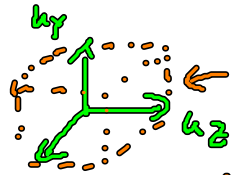
- versuche jetzt f. die $f_{u_x u_y u_z}$ die klassische Geschwindigkeitsverteilung $f(|\vec{v}|)$ zu konstruieren

$$\bar{N} = \int_0^\infty du_x \int_0^\infty du_y \int_0^\infty du_z \cdot = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} du_x \int_{-\infty}^{+\infty} du_y \int_{-\infty}^{+\infty} du_z \cdot$$

$|\vec{v}|$ irgendwie einführen

$$[0,\infty] \to [-\infty,+\infty]$$

$\frac{1}{8}$ des gesamten Raums:



aus dieser Würfelbüchse, es gilt also 8

$$= \frac{1}{8} \int d^3u \; e^{-\beta \frac{\pi^2 \hbar^2 u^2}{2mL^2}} e^{\beta\mu} \qquad u^2 = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)$$

ganzer Raum

analog $\vec{u} \mathrel{\hat{=}} \vec{r}$

$x, y, z \mathrel{\hat{=}} u_x, u_y, u_z$

um auf Geschwindigkeiten zu kommen:

$$v_i = \frac{p_i}{m} = \frac{\hbar k_i}{m} = \frac{\hbar}{m} \frac{2\pi}{L} u_i \mathrel{\hat{=}}$$ Quantisierungsbedg. im Kasten

i: x, y, z Koordinate

damit kann man u_i in v_i umrechnen im Integral

$$\bar{N} = \frac{1}{8} \underbrace{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3} \int d^3k \; e^{-\frac{\beta \hbar^2 k^2}{8m}} e^{\beta\mu} \;\Big|\; k \to \frac{k}{2}$$

$$\int d^3n \hat{=} \sum_n$$

$$\bar{N} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \, e^{-\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}} e^{\beta\mu}$$

$$= \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \int d^3p \, e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} e^{\beta\mu}$$

$$\bar{N} = \left(\frac{L}{2\pi\hbar} m\right)^3 \int d^3v \, e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} e^{\beta\mu}$$

drückt die mittlere Teilchenzahl über eine Geschwindigkeitsverteilung aus.

3.13. Maxwellverteilung der Geschwindigkeit im idealen Gas

dazu Kugelkoordinaten

$$\bar{N} = \underset{\text{Winkel-integral}}{\int dv \, v^2 \, 4\pi} \left(m \frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \underbrace{n_0 \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}\right)^{3/2}}_{= e^{\beta\mu}} e^{-\beta \frac{mv^2}{2}}$$

$= e^{\beta\mu}$, aus

$$\bar{N} = \frac{V}{\lambda_{th}^3} e^{\beta\mu}$$

$$e^{\beta\mu} = n_0 \lambda_K^3 \,, \quad \lambda_K = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}}$$

man interpretiert jetzt $\bar{N} = \bar{N} \int dv\, f_v$ mit f_v

als die mittlere Zahl der Teilchen mit der Geschwindigkeit $|\vec{v}| = v$.

$$f_v = 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2}$$

ist sogenannte Maxwell-Geschwindigkeitsverteilung im idealen Gas. Beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilg. der Zufallsgröße v.

Bemerkungen:

a) Mittelwert von $\langle v \rangle$ berechnen:

$$\bar{N} = \int dv \underbrace{v^2 \bar{N} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\beta \frac{mv^2}{2}}}_{\text{mittl. Teilchenzahl mit Geschwindigkeit } v \quad n_v}$$

$$\langle v \rangle = \frac{\int dv\, v\, n_v}{\overline{N}} = \int dv\, v\, f_v$$

Interpretation des oben geschriebenen Satzes

mittlere Geschwindigkeit pro Teilchen

$$\langle v \rangle = \left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2}$$

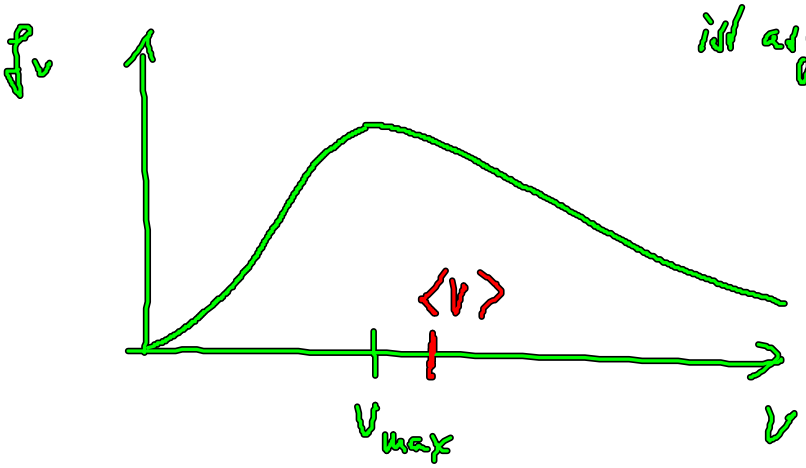
b) Maximalwert der Geschwindigkeitsverteilg.

$$v_{max} = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$$

(durch Ableitg. v. f_v und 0 setzen)

c) Darstellg. v. f_v :

ist asymmetrisch

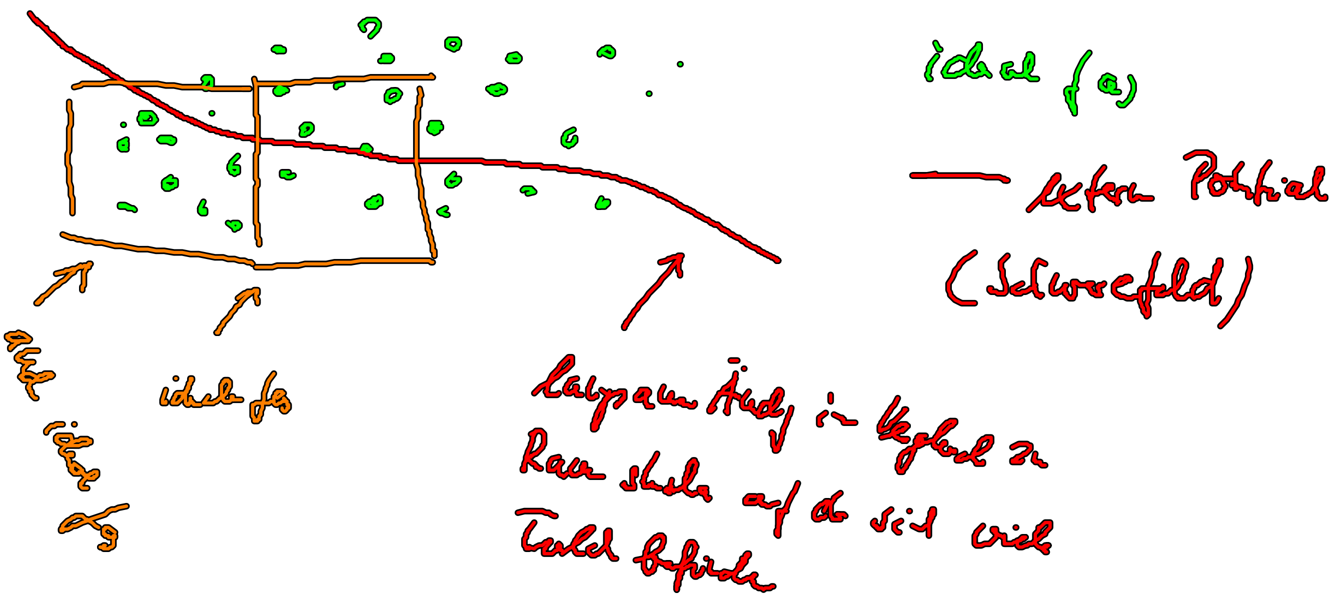


d) Zahl d. Kontakte Septen :

Sauerstoffmasse m, $kT = \frac{eV}{40}$ bei Zimmertemperatur

$$v_{max} \approx 400 \, \frac{m}{s}$$

3.1.4. Ideale Gase in räumlich schwach veränderlichen Feldern



Potential soll so schwach veränderlich sein, daß man in jedem Kasten nur 1 festen Potentialwert hat, die verschiedenen Kästchen können aber verschiedene Werte haben. Innerhalb eines Kastens werden alle Teilchen dasselbe Potential.

→ Teilchenzahl als Funktion des Potentials ($\vec{r}$) ansehen.

$\bar{N} = -\frac{\partial J}{\partial \mu}$, bereits gerechnet, wo $U(\vec{r})$ als Potential fehlte

Teilchen im Kasten

$$Z_{gk} = \sum_{n,N_n} \langle n, N_n | e^{-\beta\left(H_0 + \sum_i U(\vec{r}_i) - \mu N\right)} | n, N_n \rangle$$

f. 1 Kasten

$$\sum_i U(\vec{r}_i) \simeq \sum_i U(\vec{r}) = N\, U(\vec{r})$$

Position des Kastens

$$= \sum_{n,N_n} \langle n, N_n | e^{-\beta\left(H_0 - (\mu - U(\vec{r}))\, N\right)} | n, N_n \rangle$$

Alle bisherigen Formeln für das ideale Gas gelten weiter, wenn man $\mu \to \mu - U(\vec{r})$.

<u>Beispiel:</u> ideales Gas im Schwerefeld $U = mgz$

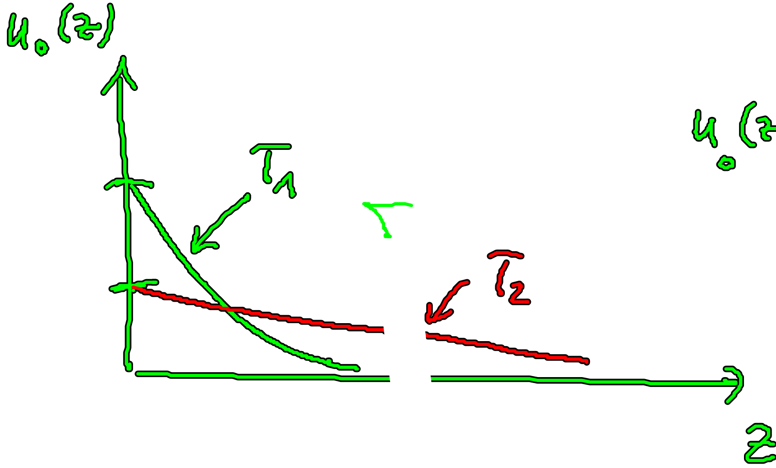
$$\frac{N}{V} = \frac{e^{\beta(\mu - mgz)}}{\lambda_T^3} = n_0(z) = n_0\, e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

ideales Gas

„z" wenn

Teilchendichte bei $z=0$

Teilchendichte n_0 hängt jetzt vom Ort ab.



$$u_0(z) = u_0 \, e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

barometrische Höhenformel

Man erkennt ein Wechselspiel zwischen thermischer Energie kT und Gravitationsenergie mgz.

Für $T \to \infty$ gibt es eine Gleichverteilung

Für $T \to 0$ lokalisieren sich die Teilchen am Boden.