3.2. Masselose Bosonen

3.2.1. Kollektive Anregungen und Quasiteilchen

Beispiele f. masselose Bosonen sind Phononen, Photonen

<u>Photonen:</u> Quasiteilchen des elektromagnetischen Felds

<u>Phononen:</u> Kollektive Anregungen der Ionenschwingg. in Festkörpern (in Moleküle: „Vibronen")

- kollektive Anregungen sind Anregungen von gekoppelten Systemen wie z.B. gekoppelte Schwingern 

  „gemeinsame Anregung"

  → oft kann man auf einen Satz von Koordinaten übergehen, bei dem die Anregungen nicht mehr gekoppelt sind (in den neuen Koordinaten steckt dann die Kopplung)

  z.B. Schwerpunkts und Relativkoordinate sind beim nicht verkoppelt und lassen sich wie freie Teilchen beschreiben

Vorteil von kollektiven Koordinaten ist in rechentechnischer Hinsicht

- Quasiteilchen: a) Teilchen + Umgebung = Quasiteilchen, dazu existiert Dispersionsrelation analog zur Schrödingergleichung (Polaron)

  b) Feldanregungen werden als harmonischer Oszillator repräsentiert mit Besetzungszahl, die keinem echten Teilchen entspricht (Photon)

<u>masselose Teilchen</u>: es gibt keine ablesbare Masse in H, das man einen Index geben kann um Teilchen durchzunummerieren: man findet <u>nicht</u>

$$\sum_{i} \frac{p_i^2}{2m_i}$$

Bsp. dafür ist $\int d^3r \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right)$ als H des elektromagn. Felds.

Ein Charakteristikum von masselose Teilchen ist

weil in H keine Teilchenzahl steht

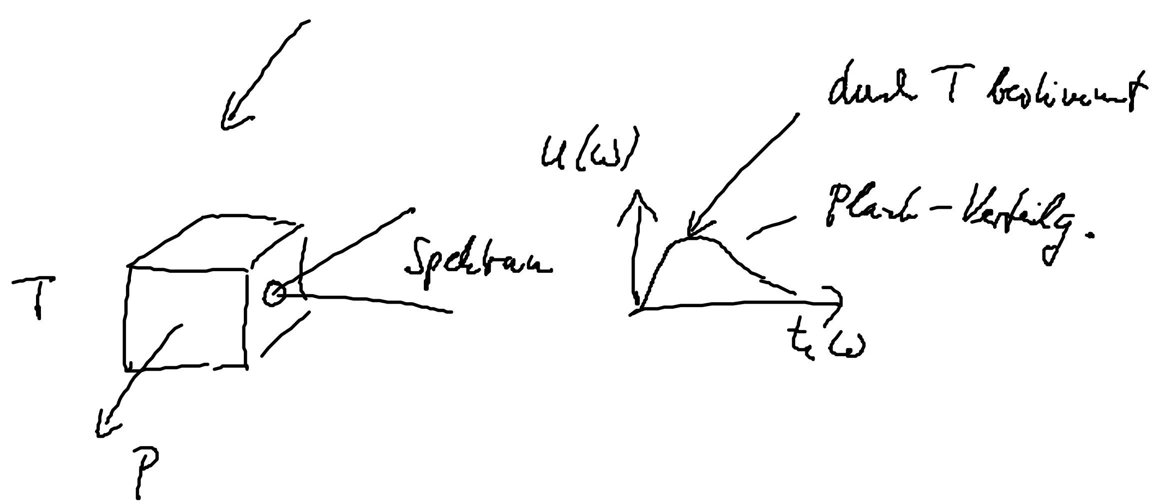
$$\mu = -\frac{\partial F}{\partial \bar{N}} = 0$$

μ ist immer 0 für masselose Teilchen.

Es gibt aber trotzdem die Quasiteilchenzahl die z.B die Zahl der Photonen abzählt, die Quasiteilchenzahl wird von außen durch die Temperatur festgelegt.

3.2.2. Photonen – Quasiteilchen (Quanten d. Strahlungsfelds

interessant: Energiedichte, Druck auf Wand die Strahlg. macht



Feld muß quantisiert werden um das richtige Spektrum:

$$\int d\omega\, u(\omega) = \int d\omega\, \frac{E(\omega)}{V}\,, \quad E(\omega) = \text{Energie im Kasten } V$$

zu berechnen. Braucht sowas wie E, Zustandssumme, Zustände

um Zustände zu bekommen muß Feld quantisiert werden

Startpunkt ist klassische Maxwelltheorie:

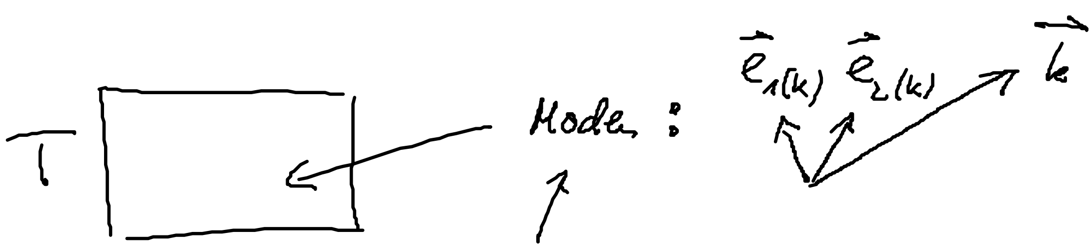
$$\Delta \vec{A}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\,\partial_t^2\, \vec{A}(\vec{r},t) = 0$$

$\vec{A}$ – Vektorpotential im Kasten ohne Ladungen + Ströme

Randbedingungen werden durch Kasten bestimmt (ED)

nehmen großen Kasten, Zustände dicht gelegen.

Lösungen sind analog zum Teilchen ebene Welle:



Eigenfunktion des $\vec{A}$-Feldes

Zerlege Feld nach ebenen Wellen mit dem Ortsanteil:

$$\vec f_{\vec k,\lambda(\vec k)} = \frac{e^{i\vec k\cdot\vec r}}{\sqrt V}\,\vec e_{\vec k,\lambda(\vec k)} \qquad \vec e_{\vec k\lambda(\vec k)} \perp \vec k$$

$$\vec A(\vec r,t) = \sum_{\vec k}\sum_{\lambda(\vec k)=1}^{2} \underbrace{q_{\vec k,\lambda}(t)}_{\substack{\text{Entwicklungs-}\\ \text{koeffizienten}\\ \text{(unbekannt)}}}\ \underbrace{\vec f_{\vec k\lambda}(\vec r)}_{\substack{\text{spannt Raum auf}\\ \text{(vollständiges System)}}} = \sum_{k} q_{k}(t)\, f_k(\vec r)$$

k ~ Verbundindex

Ansatz einsetzen in Wellengleichung:

$$\sum_k f_k(r)\left(\underbrace{i\vec k\cdot i\vec k}_{\text{aus } \Delta=\vec\nabla\cdot\vec\nabla}\, q_k(t) - \frac{1}{c^2}\ddot q_k(t)\right) = 0$$

vollständiges System, Klammer muß verschwinden

$$\ddot q_k(t) + c^2 \underbrace{k^2}_{|\vec k|^2} q_k(t) = 0$$

Oszillatorgleichung für jeden einzelnen Oszillator mit den Quantenzahl $k = \{\vec{k}, \lambda(\vec{k})\}$.

man hat also Quasiteilchen die formal als Oszillator beschrieben werden können.

Quasiteilchen haben Dispersion $\omega = c|\vec{k}|$
$\omega = \omega(\vec{k})$.

jetzt erfolgt die formale Quantisierung nach den Regeln der Quantenmechanik:

$$H_{\text{Strahlungsfeld}} = \sum_{\vec{k},\lambda(\vec{k})} \hbar\omega_k \left(a^+_{\vec{k},\lambda}\, a_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right)$$

in der Leiterdarstellung.

(Feld ist jetzt quantisiert, wenn man noch Vertauschungsrelation zwischen den a's fordert:

$$\left[a^+_{\vec{k}_1\lambda_1}, a_{\vec{k}_2\lambda_2}\right] = \delta_{\vec{k}_1\vec{k}_2}\,\delta_{\lambda_1\lambda_2}$$

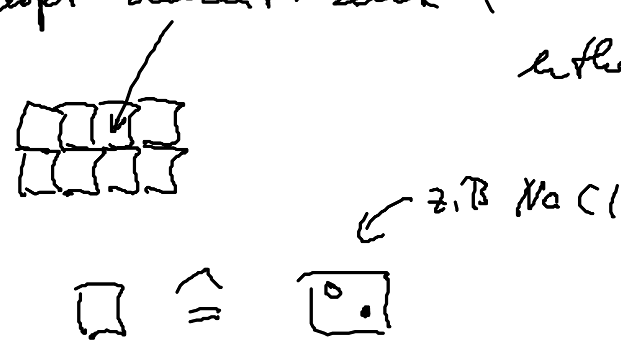
in Übereinstimmung mit Experiment.)

Die Leiterdarstellg. führt zu einer konsistenten Formulierg. von Feld / Teilchen.

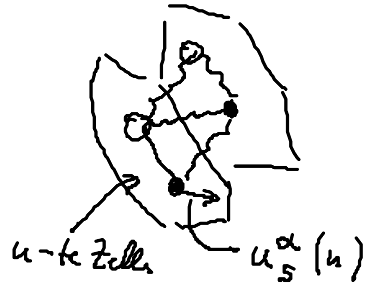
eigentliches Ziel: Zustandssumme zu berechnen: man braucht Zustandssumme von oszillatorischen Systemen.

3.2.3. Phononen – die kollektiven Anregungen von Ionen-Schwingungen im Festkörper

Festkörper: periodische Aneinanderreihung von Untereinheiten, die kleinste Untereinheit heißt Elementarzelle (kann aber mehrere Atome/Ionen enthalten)



Es gibt p Ionen pro Elementarzelle und es gibt N Elementarzellen die insgesamt ein Volumen V aufbauen



elektromagnetische Kräfte

(„Federn")

$\sim \; s = 1,2$

Man hat die folgende Newtongleichung für die α-Komponente des s-ten Ions in der n-ten Zelle:

$$m_s\, \ddot{u}_s^\alpha(n) = -\underbrace{\sum_{\beta,t,m} K_{st}^{\alpha\beta}(n,m)\, u_t^\beta(m)}$$

Σ über alle Kräfte die bei einer Auslenkung des t-ten Teilchens in der m-ten Zelle in Richtung β verursacht wird,

K – Kraftkonstante

Ansatz ist rücktreibende Kraft im Sinne des harmonischen Oszillators

man erkennt, daß alle Oszillatoren gekoppelt sind.

→ Normalkoordinaten sind nötig um auf „neue" kollektiven, nicht entkoppelten Oszillatoren zu kommen

Ansatz: $$u_s^\alpha(n) = \frac{1}{\sqrt{N m_s}} \sum_{\vec k,\lambda}^{N\;3p} A_s^\alpha(\lambda,\vec k)\, q_{\vec k\lambda}(t)\, e^{i\vec k\cdot\vec r_n}$$

Modeindex

hoffentlich ungekoppelte Oszillatoren

Ansatz in Form Welle,

A's, q's müssen bestimmt werden:

Forderung: $$\ddot q_{\vec k,\lambda} + \omega_\lambda^2(\vec k)\, q_{\vec k\lambda} = 0$$

$q_{\vec k,\lambda}$ soll analog Strahlungsfeld einer Oszillatorgl. genügen mit Dispersionsrelation $\omega_\lambda(\vec k)$.

$\lambda: 1 \dots 3p$, $k: n\frac{2\pi}{L}$, $n: 0, \dots N$.

u-Ansatz einsetzen in Newtongl.

$$\omega_\lambda^2(\vec k)\, A_s^\alpha(\vec k) = \sum_{t,\beta} \underbrace{\sum_{n-m}}_{*} \frac{K_{st}^{\alpha\beta}\overbrace{(n-m)}^{*}}{\sqrt{m_s m_t}}\, e^{-i(\vec r_n-\vec r_m)\vec k}\, A_t^\beta(\vec k)$$

kommt durch 2. Ableitung in Zeit

* alle Größen in einem periodischen Festkörper können nur von Differenz v. Abstand von 2 Zellen abhängen

Bestimmungsgleichg. für $\omega_\lambda(\vec{k})$, also

alle Moden der ungekoppelten Oszillatoren q

und für die $A_s^\alpha(k)$

$\longrightarrow$ steht in Form ein Eigenwertproblems

dichte Matrix

$\omega_\lambda(k) \hat{=}$ Eigenwerte

$A_s^\alpha(k) \hat{=}$ Eigenvektoren

wenn $\omega_\lambda(k)$ bekannt ist, so

$$H = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_\lambda(\vec{k}) \left(a^\dagger_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right)$$

analog zu Photonen

<u>Merkregeln für $\omega_\lambda(\vec{k})$</u>: (siehe Festkörpertheorie)

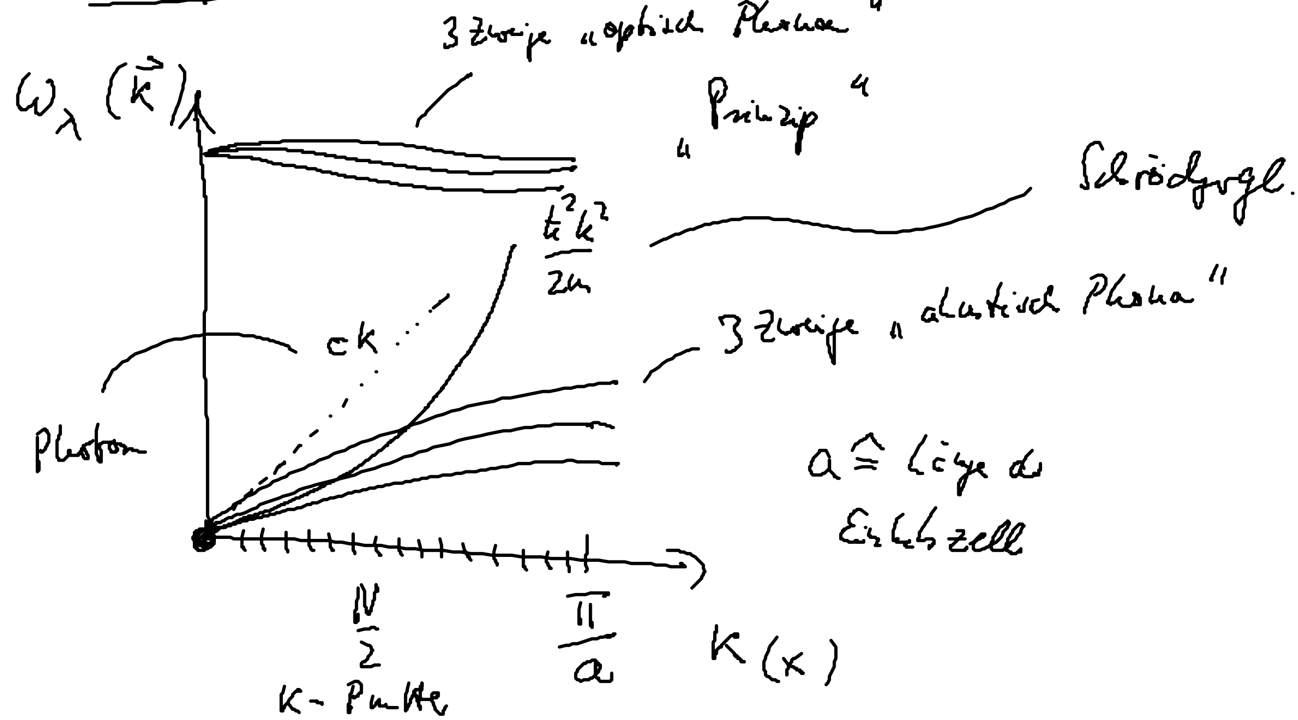
- es gibt weiterhin $3pN$ Oszillatoren,

Anzahl der Freiheitsgrade = Konstant

Aufteilg. λ: 1, 2 ... 3p

$\vec{k}$: $\frac{n 2\pi}{L}$, $n = 0, \dots N$

Beispiel für ein 2atomige Elementarzelle:



- aus den 3Np gekoppelten Oszillatoren werden 3N akustische Phononen
  (3p − 3) N optische Phononen ‖

- akustische Phononen $\equiv$ $\omega(|\vec{k}| \to 0) = 0$ ‖
- $\underbrace{\text{optische Phonon}}$ $\equiv$ $\omega(|\vec{k}| \to 0) \neq 0$ ‖

Namen weil diese Phononen an optische Felder koppeln,

⊕ ⊖ „gegenphasige Schwingg." ⇒ „Dipol"
→ ←

akust. Phonon: „gleichphasige Schwingung"

$\oplus \rightarrow \ominus \rightarrow$