3.2.5 Photonen: Zustandsgleichung u. Spektrum

Erinnerung: Photonen als Quantenteilchen d. elektromagnetischen Felds,

Dispersionsrelation $\omega = c|\vec{k}|$

für beide Polarisationsrichtungen

eines feststehenden Wellenvektors $\vec{k}$

Quantenteilchen / Photonen = Oszillatoren

Ziel: Eigenschaften des Photonengases als Funktion der Temperatur T, thermische u. kalorische Zustandsgl. berechnen über die Zustandssumme u. diskutieren

$$Z_{K=qu} = \prod_{\underbrace{k}_{\text{allgem. Index (Verbundindex) f. Oszillator: } k = (\vec{k}, \lambda(k)) \; 1/2}} \frac{e^{-\beta\hbar \frac{\omega_k}{2}}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_k}} = \prod_{\vec{k}} \prod_{\lambda(\vec{k})} \frac{e^{-\beta\hbar\frac{\omega(k)}{2}}}{1-e^{-\beta\hbar\omega(k)}}$$

$|\vec{k}|$

allgemein Zustandssumme f. Oszillatoren

$$= \prod_{\vec{k}} \left(\frac{e^{-\beta\hbar\frac{\omega(k)}{2}}}{1-e^{-\beta\hbar\omega(k)}} \right)^2$$

Ausführg. von $\prod_{\lambda=1}^{2}$

$$\ln Z_K = -2 \sum_{\vec{k}} \ln\left(1-e^{-\beta\hbar c|\vec{k}|}\right) - \underbrace{\sum_{\vec{k}} \beta\hbar c|\vec{k}|}$$

brauchen wir f. Zustandsgleichungen

Anteil der Grundzustandsenergie, lassen wir weg, weil er kein T-Abhängigkeit in der kalorischen Gl. hat

$$\ln Z_K = -2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \ln\left(1-e^{-\beta\hbar c|\vec{k}|}\right)$$

Übergang

zum Integral, $\vec{k}$ - Zustände sehr dicht, Kasten groß!

Problem schreit nach Kugelkoordinaten:

$$\int d^3k = \underbrace{\int d\varphi \int d\vartheta \sin\vartheta}_{4\pi} \int dk\, k^2 , \quad |\vec{k}| = k$$

$$\ln Z_K = -2 \frac{4\pi V}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk\, k^2 \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar c k}\right)$$

$$k \Rightarrow x = \beta\hbar c k$$

$$= -\frac{V}{\pi^2} \underbrace{\int_0^\infty dx\, x^2 \ln\left(1 - e^{-x}\right)}_{\text{Zahl, nachschlagen!}} \frac{1}{(\beta\hbar c)^3}$$

$$\ln Z_K = \frac{\pi^2}{45} \frac{V}{(\beta\hbar c)^3}$$

3.2.5.1. Auswertung der Photonzustandssumme

a) kalorische Zustandsgleichung:

$$E = -\frac{\partial \ln Z_G}{\partial \beta} = \frac{\pi^2}{15} \frac{V}{(\hbar c)^3} (kT)^4$$

Die Energiedichte eines Photonengases ist $\frac{E}{V} \sim T^4$

Diese Abhängigkeit ist das Stefan-Boltzmann-Gesetz.

Völlig andere Abhängigkeit als beim idealen Gasgesetz

$$\frac{E}{V} \sim T.$$

b) thermische Zustandsgleichung

$$p = kT \frac{\partial \ln Z_G}{\partial V} = \frac{\pi^2}{45} \frac{1}{(\beta \hbar c)^3} kT = \frac{1}{3} \frac{E}{V}$$

Impulsübertrag über Kastenwand und ausgeübter Druck darauf.

Zahlen einsetzen:

typische Temperatur 300 K

bekommt man in etwa: 10^{-7}-10^{-8} $\frac{N}{m^2}$ „Hausnummer"

ist also viel kleiner als Alltagserfahrung

wieder im Gegensatz zum klass. Gas ($p \sim T$)

c) Ableitung der spektralen Energiedichte eines Strahlers

(Planck-Strahlg.)

- wie viel Energie kommt bei welcher Frequenz (Farbe) aus einem leuchtenden Körper der auf Temperatur T gehalten wird
- schwache WW bzw. Licht-Materie weil Materie nicht mitbetrachtet.

$$E = -\partial_\beta \ln Z_k = \partial_\beta \frac{V}{\pi^2} \int dk\, k^2 \ln\left(1-e^{-\beta \hbar c k}\right)$$

spektral auflösen?

Integral über alle Wellenzahlen, interpretieren als Integral über alle Frequenzen über

$\omega = ck$

$$\frac{E}{V} = \partial_\beta \frac{1}{\pi^2 c^3} \int d\omega\, \omega^2 \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)$$

E-Dichte

$$\left(= \int d\omega\, \underline{\underline{u(\omega)}} \quad \leftarrow \text{da wollen wir hin} \right)$$

spektrale Energiedichte

$$= \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega\, \omega^3 \frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

$$w_{el} = \frac{E}{V} = \int d\omega\, u(\omega)$$

Energiedichte d. elektromagnet. Feld bei Temp T

$$\boxed{u(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2} \frac{\omega^3/c^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}}$$

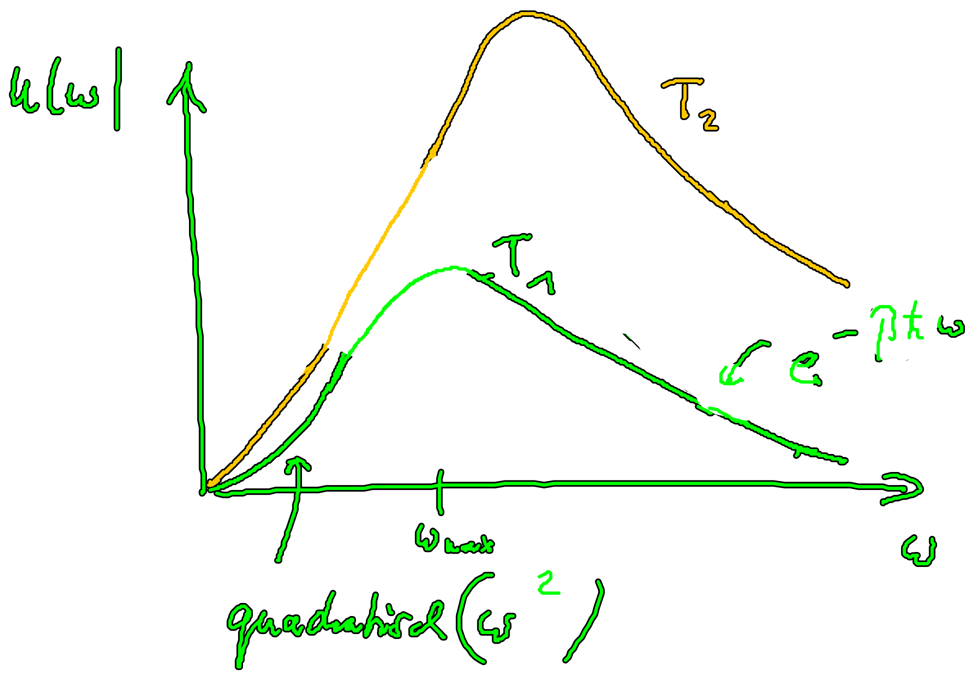
Plancksche Verteilungsfunktion (1900)

$u(\omega)$ spektrale Energiedichte d. strahlenden Körpers:

Vakuum, Sonne, Herdplatte, Universum, etc.

3.2.5.2. Bemerkungen zur Planckschen Verteilung

$u(\omega)$ als Funktion von ω und T:



$T_1 < T_2$

a) Wiensches Verschiebungsgesetz

Maximalwert durch Ableitung, Nullstelle finden

$\omega_{max} \approx 2{,}8\, kT/\hbar$ (numerisch Nullstelle suchen)

Es gibt eine Verschiebung des Maximums, wenn die Temperatur ansteigt, Verschiebg. ist linear in T

b) Rayleigh-Jeans Gesetz

Versuch mit klassischer Physik $u(\omega)$ zu beschreiben:

$$u(\omega) \longrightarrow u_{\text{klassisch}}(\omega)$$

$$\uparrow$$

$$\frac{\hbar\omega}{kT} \to 0 \quad (\text{klassisch } T \to \infty)$$

$$u(\omega) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\hbar\omega^3/c^3}{\underbrace{1 + \beta\hbar\omega}_{e^{\beta\hbar\omega}} - 1} \Rightarrow \underbrace{\frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^3} = u_{kl}(\omega)}_{\text{Rayleigh-Jeans-Gesetz}}$$

kein $\hbar$!

beschreibt die Ultraviolettkatastrophe der klassischen Physik

c) Temperaturbestimmung an Oberfläche v. Sternen

durch Messg. v. $u(\omega)$ kann man T anfitten

über das Maximum. Sonne $\Rightarrow$ 5600 K.

d) kosmische Hintergrundstrahlung

Universum ist der Kasten mit Volumen V

Photon allein im Kasten, kein WW mit Materie dann gilt Theorie von oben

(Theorie gilt nur f. hinreichend schwache Licht-Materie WW

→ Atombildg. bereits eingesetzt, denn Atome WW nicht mehr so stark mit Licht wie Gruppen aus e^-, e^+)

$E_{\text{photongas}} \sim V T^4$; E = konstant, wenn kein Austausch mit Materie

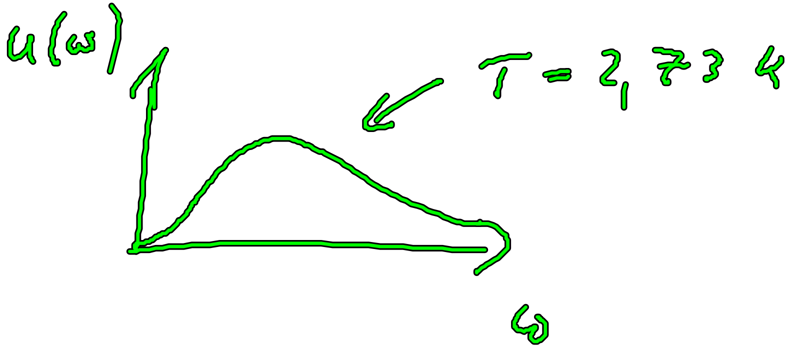
Ausdehnung $V(t)$ des Universums $V \uparrow$, so muß
↑
Zeit

$T \downarrow$ sich verringern, um E = konstant zu halten.

Ab dem Zeitpunkt t_0 an dem sich Photonen allein entwickeln gilt Plancksche Verteilung:

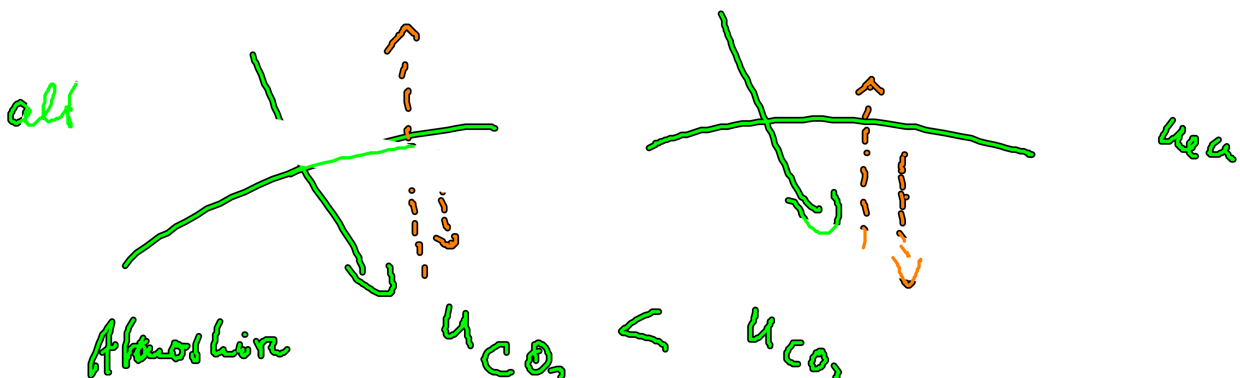
d.h. es muß in Resonator, also im Universum eine Hintergrundstrahlg. herrschen mit $T(t)$.

Dies Strahlg. ist die kosmische Hintergrundstrahlg.



e) Treibhauseffekt

CO_2 steigt in Atmosphäre, wir vergleichen 2 verschiedene Gleichgewichte mit verschiedenen CO_2 Anteilen



$u_{CO_2} < u_{CO_2}$

höherer E-Speicher

$$E^{alt/neu} \sim T^{4\,alt/neu}$$

nehmen an, daß mehr CO_2 zu mehr E-Speicherung in Photongas führt, durch Absorption u. Reemission

$$\underbrace{E_{alt} + n\,\%\, E_{alt}}_{E_{neu}} \sim T_{neu}^4 \sim (T_{alt} + \Delta T)^4$$

↑ klein Korrektur

$$(T_{alt} + \Delta T)^4 \hat{=} T_{alt}^4 + 4 T_{alt}^3 \Delta T + \ldots$$

↑ Taylor

$$E_{alt}\left(1 + \frac{n}{100}\right) = T_{alt}^4 \left(1 + 4\frac{\Delta T}{T_{alt}}\right)$$

$$\frac{n}{100} = \frac{4\Delta T}{300\,K} \rightarrow n\,K \approx \Delta T$$

Dieses einfach Modell liefert 1K Temperaturerhöhung pro 1% Erhöhung von CO_2 in Atmosphäre.