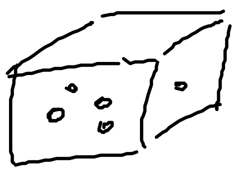
3.4. Massive Bosonen und Fermionen

Abzählbare Teilchen im Kasten, ununterscheidbar



$\langle N \rangle$ mittlere Teilchenzahl

T Temperatur im Exp. festlegen

massiv: Masse und Teilchenzahl stehen in $\mathring{H}$ drin

$\rightarrow \mu \neq 0$ chemisches Potential $\neq 0$

im allgemeinen.

am einfachsten ist die Rechnung im großkanonischen Ensemble

übliche Weg: Zustandssumme $\rightarrow$ Zustandsgleichg $\rightarrow$ Physik

3.4.1 Zustandssumme für massive Quantengase

Zustandssumme f. großkanonisches Ensemble:

$$Z_{gk} = Sp\left(e^{-\beta(H - \mu N)} \right)$$

später J berechne $J = J(Z_{gk})$ als thermodyn. Potential

Zustände sind die Vielteilchenzustände:

$|N_n, n\rangle$

Teilchenzahl

Satz von Besetzungszahl f. Einteilchenzustand $|i\rangle$

$$n \equiv \{n_i\}$$

Vielteilchenzustände sind symmetrisiert (Boson, Fermion)

Zustände aus den Produktzustand der 1 Teilchenfunktionen

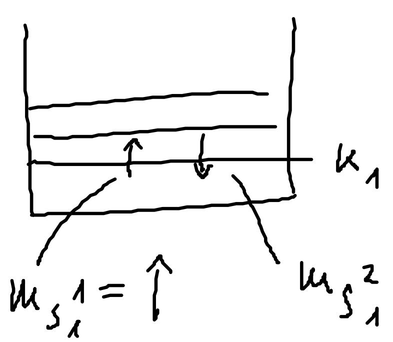
Einteilchenfunktionen im Ortsraum:

$$\varphi_{k m_s}(\vec{r}, s) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \chi_{m_s}(s) = |n_{k, m_s}\rangle$$

0, 1 für Fermionen

0, 1, 2 ... ∞ für Boson

$$|N_n, n\rangle = |n_{k_1 m_{s_1}^1}, n_{k_1 m_{s_1}^2} \ldots n_{k_2 m_{s_2}^1} \ldots\rangle$$



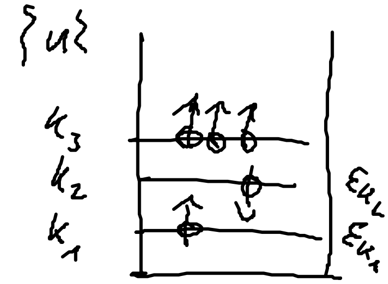
f. Fermionen

$$Z_{gk} = \sum_{n, N_n} \langle n, N_n | e^{-\beta(H-\mu N)} | n, N_n \rangle$$

wie zählen wir die ab?

symmetrisierte Vielteilchen-Zustände

$$= \sum_{\substack{\text{(alle mgl. Zustände} \\ n,\, N_n)}} e^{-\beta(\varepsilon_n - \mu \bar{N}_n)}$$



$$m_{s_1} \equiv s_1$$

$$= \sum_{n_{k_1 s_1}} \sum_{n_{k_2 s_2}} \cdots \sum_{n_{k_N s_N}} e^{-\beta\left(\sum_{k_i, s_i} \varepsilon_{k_i} n_{k_i s_i} - \mu \sum_{k_i s_i} n_{k_i s_i}\right)}$$

$$= \sum_{n_{k_1 s_1}} e^{-\beta(\varepsilon_1-\mu)\sum_{s_1} n_{k_1 s_1}} \sum_{n_{k_2 s_2}} e^{-\beta(\varepsilon_2-\mu)\sum_{s_2} n_{k_2 s_2}} \cdots$$

$$= \cdots \sum_{n_{k_i s_i = -s_0}} e^{-\beta(\varepsilon_{k_i} - \mu)\, n_{k_i s_i = -s_0}} \cdots \sum_{n_{k_i s_i = s_0}} e^{-\beta(\varepsilon_{k_i} - \mu)\, n_{k_i s_i = s_0}}$$

halbzahlige Spinschritte

Spin $s_0 = \frac{1}{2}$ f. Elektronen ...

$s_0 = 0$ f. Atome ...

$$\Big| \quad n_{k_i\uparrow} \quad n_{k_i\downarrow} \quad \Big\rangle$$

$$z_{gk} = \cdots \left(\sum_{n_{k_i s}=0}^{\text{obere Grenze}} e^{-\beta(\varepsilon_{k_i}-\mu)\, n_{k_i s}} \right)^{2s_0+1} \cdots$$

$(k_1 \ldots) \ldots$

obere Grenze : 1 Fermion

obere Grenze : ∞ Boson

Spezialisieren auf Fermionen und Bosonen

a) Fermionen : $s = \frac{1}{2}$ f. Elektron, Quarks ...

$$z_{gk}^{F} = \cdots \left(\sum_{n_{k_i s}=0}^{1} e^{-\beta(\varepsilon_{k_i}-\mu)\, n_{k s}} \right) \cdots$$

$$= \cdots \left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_{k_i}-\mu)} \right)^{2} \cdots$$

$$\underbrace{z_{gk}^{F} = \prod_{k_i=1}^{\text{höchstmögl. k-Zustand}} \left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_{k_i}-\mu)}\right)^{2}}$$

Zustandssumme f. Gas von identisch Fermionen mit $s_0 = \frac{1}{2}$

b) Bosonen $S_0 = 0$ { z.B. spingesättigte Atome

$$Z_{gk} = \cdots \left(\sum_{n_{k_i s}=0}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon_{k_i}-\mu)\, n_{ks}} \right) \cdots$$

geometrische Reihe

$$= \cdots \left(\frac{1}{1-e^{-\beta(\varepsilon_{k_i}-\mu)}} \right) \cdots$$

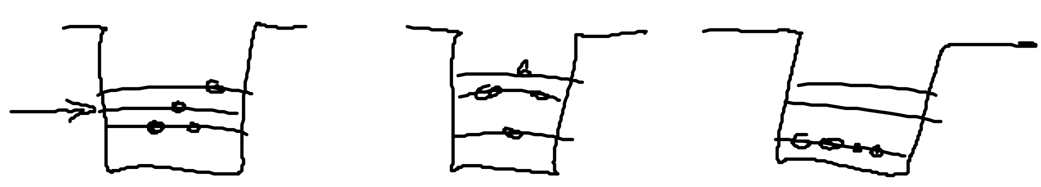
$$\underbrace{Z_{gk} = \prod_{k_i} \frac{1}{1-e^{-\beta(\varepsilon_{k_i}-\mu)}}}_{\text{Zustandssumme f. Gas von identischen Bosonen mit } S_0=0}$$

man könnte jetzt Zustandsgleichungen berechnen,
vorher machen wir aber noch die „mittleren Besetzungszahlen"

1.4.2. Mittlere Besetzungszahlen für Quantengase

Ensemble

wieviele Teilchen sind im Mittel in diesem Zustand?



über alle diese Zustände wird die Zustandssumme berechnet.

Mittelwert der Zahl $\langle n_{ks} \rangle$, also: wieviele Teilchen sind im Mittel im Zustand k mit der Spin-einstellung $s = \uparrow$ oder $\downarrow$ bzw. $s = 0$ für Bosonen.

$$\langle A \rangle = \int da \; \underset{\text{Realisierung}}{a} \; \underset{\text{Wahrscheinlichkeit}}{W(a)}$$ so wird Mittelwert berechnet

$$\langle A \rangle = \sum_i a_i \; W(a_i)$$

analog:

$$\langle n_{ks} \rangle = \frac{1}{Z_{gk}} \ldots \sum_{n_{ks}=0}^{1,\infty} n_{ks} \; e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu) n_{ks}} \ldots$$

Z_{gk}: Normierung f. Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{\cancel{\ldots} \; \partial_{\beta\mu} \sum_{n_{ks}=0}^{1,\infty} e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu) n_{ks}} \; \cancel{\ldots}}{\cancel{\ldots} \sum_{n_{ks}=0}^{1,\infty} e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu) n_{ks}} \; \cancel{\ldots}}$$

$$\langle n_{ks}^F \rangle = \partial_{\beta\mu} \ln\left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}\right)$$

$$= \frac{e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}}{1+e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}+1}$$

$$\underbrace{\langle n_{ks}^F \rangle = f_{ks}^F = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}+1}}$$ Fermiverteilung

mittlere Zahl v. Fermionen in dem Einteilchenzustand k_s

$$\langle n_{ks}^B \rangle = \partial_{\beta\mu} \ln\left(\frac{1}{1-e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}}\right)$$

$$= \frac{e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}}{1-e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}-1}$$

$$\underbrace{\langle n_{ks}^B \rangle = f_{ks}^B = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}-1}}$$ Boseverteilung

mittlere Zahl v Bosonen in den Einteilchenzustand $k\, s = 0$

3.4.3. Diskussion der mittleren Besetzungszahl $\langle n^{F/B}_{ks} \rangle$

a) Interpretation von $f^{F/B}$ ist:

mittlere Besetzungszahl oder „Verteilung" der Teilchen auf die Einteilchenzustände

$$f^{F/B}_{ks} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} \pm 1}$$

b) klassischer Grenzfall muß Boltzmannverteilung ergeben:

$$\mu_{klass} = kT \ln\left(n_0 \lambda_{th}^3\right) \xrightarrow{\text{niedrige Dichte}} \text{stark negativ}$$

$$n_0 = \frac{N}{V} = \text{Teilchendichte}$$

durch $e^{-\beta\mu} \underset{klass}{\rightarrow} e^{\beta|\mu|} \rightarrow$ sehr groß, „1" weglassen

$$f^{F/B}_{ks} = e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}$$ ist die Boltzmannverteilung des klassischen Gases

Fermionen und Bosonen sind nicht zu unterscheiden

$f^B_{ks} \ll 1$, weil $e^{\beta\mu} \ll 1$

Mehrfachbesetzg spielen kein Rolle,
damit Pauliprinzip nicht wichtig

c) wie berechnet man $f^{F/B}$?

bekannt ist ε_k aus dem Kasten $\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)$

bekannt ist T, β, von außen eingestellt

um $f^{F/B}$ zu zeichnen braucht man μ

$$\overline{N} = \sum_{k,s} f^{F/B}_{ks}(\mu, T) = \overline{N}(\mu, T)$$

mittlere
Gesamtteilchenzahl durch Summe über
mittlere Einteilchenbesetzungen

Umstellen von $\overline{N} = \overline{N}(\mu, T)$ nach $\mu = \mu(\overline{N}, T)$

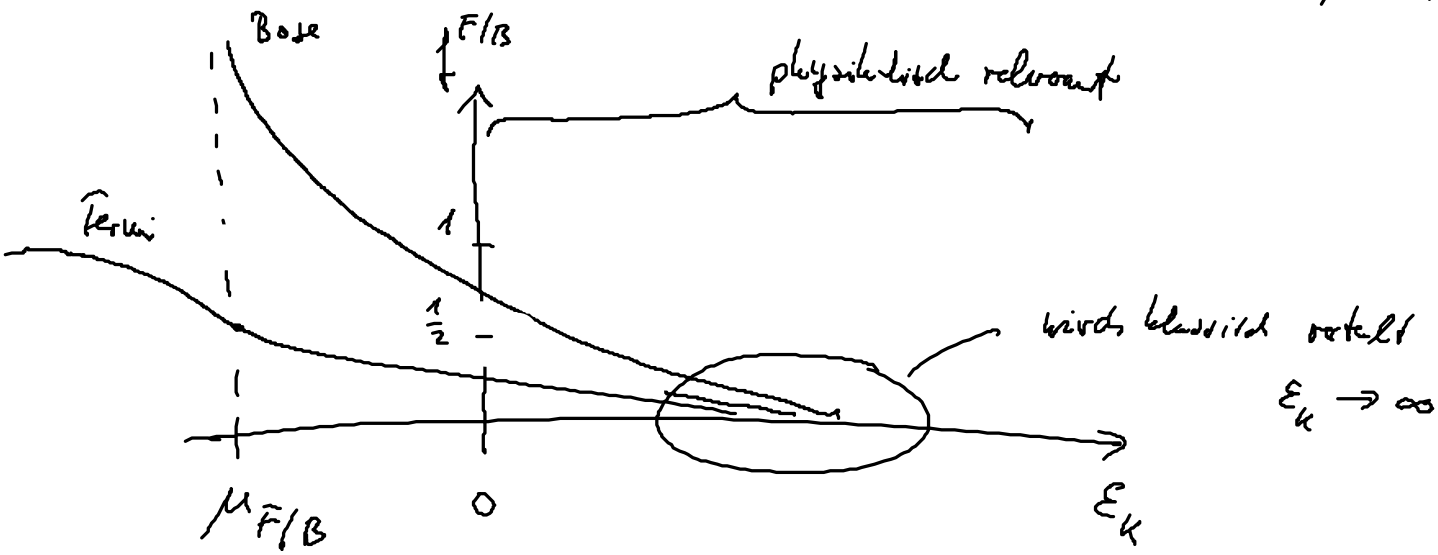
$\overline{N}, T$ kann von außen festgelegt werd

$\Rightarrow \mu$ ist auch bekannt

$f^{F/B}$ kann gezeichnet werden

d/ Qualitatives Verhalten:

Vgl. von f^F_{ks} / f^B_{ks} für $\beta_F = \beta_B$, $\mu_F = \mu_B$



$\mu \leq 0$ muß immer bei Boseverteilg. der Fall sein, aus physikalischen Gründen

$\rightarrow$ β, μ identisch passen in diesen Boskasten mehr Teilchen als in den Fermikasten, weil Mehrfachbesetzungen nur bei Bosonen erlaubt sind