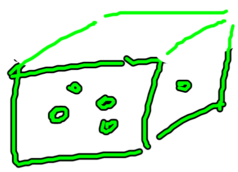
3.4. Massive Bosonen und Fermionen

Abzählbare Teilchen im Kasten, ununterscheidbar



$\langle N \rangle$ mittlere Teilchenzahl

T Temperatur im Exp. festgelegt

massiv: Masse und Teilchenzahl stehen in $\hat{H}$ drin

$\rightarrow$ $\mu \neq 0$ chemisches Potential $\neq 0$

im allgemeinen.

am einfachsten ist die Rechnung im großkanonischen Ensemble

üblicher Weg: Zustandssumme $\rightarrow$ Zustandsgleichung $\rightarrow$ Physik

3.4.1 Zustandssummen für massive Quantengase

Zustandssumme f. großkanonisches Ensemble:

$$Z_{gk} = Sp\left(e^{-\beta(H-\mu N)}\right)$$

später J berechne $J = J(Z_{gk})$ als thermodyn. Potential

Zustände sind die Vielteilchenzustände:

$|N_n, n\rangle$

Teilchenzahl

Satz von Besetzungszahl f. Einteilchenzustand $|i\rangle$

$$n \equiv \{n_i\}$$

Vielteilchenzustände sind symmetrisiert (Bose, Fermion)

Zustände aus den Produktzustand der 1 Teilchenfunktionen

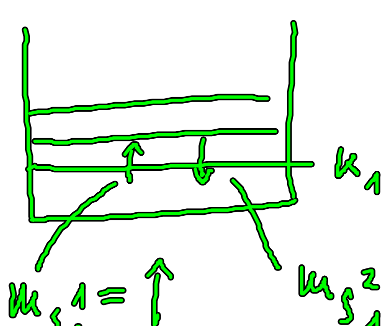
Einteilchenfunktionen im Ortsraum:

$$\varphi_{k m_s}(\vec{r}, s) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \chi_{m_s}(s) = |n_{k, m_s}\rangle$$

0,1 für Fermionen

0,1,2 ... ∞ für Boson

$$|N_n, n\rangle = |n_{k_1 m_{s_1}^1}, n_{k_1 m_{s_1}^2} \cdots n_{k_2 m_{s_2}^1} \cdots \rangle$$



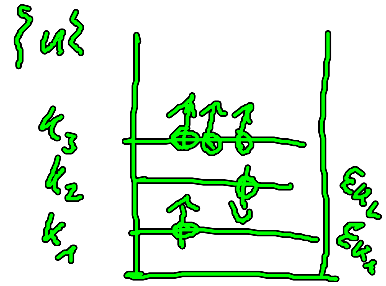
f. Fermionen

$$Z_{gk} = \sum_{n, N_n} \langle n, N_n | e^{-\beta(H-\mu N)} | n, N_n \rangle$$

wie zählen wir diese ab ?

symmetrisierte Vielteilchenzustände

$$= \sum_{\substack{(\text{alle mgl. Zustände}\\ n,\, N_n)}} e^{-\beta(E_n - \mu \bar{N}_n)}$$



$m_{s_1} \equiv s_1$

$$= \sum_{n_{k_1 s_1}} \sum_{n_{k_2 s_2}} \cdots \sum_{n_{k_N s_N}} e^{-\beta\left(\sum_{k_i, s_i} \epsilon_{k_i} n_{k_i s_i} - \mu \sum_{k_i, s_i} n_{k_i s_i}\right)}$$

$$= \sum_{n_{k_1 s_1}} e^{-\beta(\epsilon_1-\mu)\sum_{s_1} n_{k_1 s_1}} \sum_{n_{k_2 s_2}} e^{-\beta(\epsilon_2-\mu)\sum_{s_2} n_{k_2 s_2}} \cdots\cdots$$

$$= \cdots\cdots \sum_{n_{k_i s_i = -s_0}} e^{-\beta(\epsilon_{k_i}-\mu)\, n_{k_i s_i = -s_0}} \cdots \sum_{n_{k_i s_i = s_0}} e^{-\beta(\epsilon_{k_i}-\mu)\, n_{k_i s_i = s_0}}$$

halbzahlige Spinschritte

Spin $s_0 = \frac{1}{2}$ f. Elektron ...

$s_0 = 0$ f. Atome ...

$$| \; n_{k_i\uparrow} \; n_{k_i\downarrow} \; \rangle$$

$$Z_{gk} = \dots \left(\sum_{n_{k_i s}=0}^{\text{obere Grenze}} e^{-\beta(\varepsilon_{k_i}-\mu) n_{k_i s}} \right)^{2s_0+1} \dots$$

$(k_1 \dots) \dots$

obere Grenze: 1 Fermion

obere Grenze: ∞ Boson

Spezialisieren auf Fermion und Bosonen

a) Fermion: $s = \frac{1}{2}$ f. Elektron, Quarks …

$$Z_{gk}^F = \dots \left(\sum_{n_{ks}=0}^{1} e^{-\beta(\varepsilon_{k_i}-\mu) n_{ks}} \right)^2 \dots$$

$$= \dots \left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_{k_i}-\mu)} \right)^2 \dots$$

$$\underbrace{Z_{gk}^F = \prod_{k_i=1}^{\substack{\text{höchst mgl.} \\ k\text{-Zustand}}} \left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_{k_i}-\mu)}\right)^2}_{\text{Zustandssumme f. Gas von identisch Fermion mit } s_0 = \frac{1}{2}}$$

b) Bosonen $S_0 = 0$ f. z.B. spingesättigte Atome

$$Z_{gk} = \dots \left(\sum_{n_{k_i s}=0}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon_{k_i}-\mu)\, n_{ks}} \right) \dots$$

geometrische Reihe

$$= \dots \left(\frac{1}{1-e^{-\beta(\varepsilon_{k_i}-\mu)}} \right) \dots$$

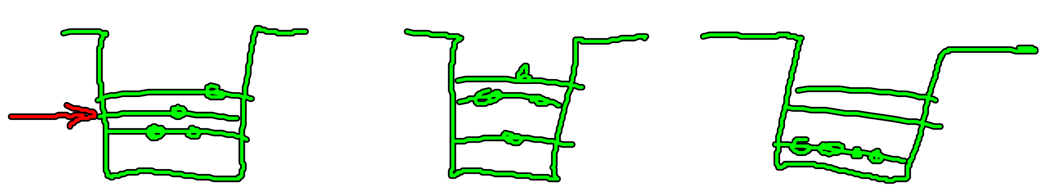
$$\underbrace{Z_{gk} = \prod_{k_i} \frac{1}{1-e^{-\beta(\varepsilon_{k_i}-\mu)}}}_{\text{Zustandssumme f. Gas von identischen Bosonen mit } S_0=0}$$

man könnte jetzt Zustandsgleichungen berechnen, vorher machen wir aber noch die „mittlere Besetzungszahl“

1.4.2. Mittlere Besetzungszahlen für Quantengase

Ensemble

wieviele Teilchen sind im Mittel in diesem Zustand?



über alle diese Zustände wird die Zustandssumme berechnet

Mittelwert der Zahl $\langle n_{ks} \rangle$, also: wieviele Teilchen sind im Mittel im Zustand k mit der Spin-einstellung $s = \uparrow$ oder $\downarrow$ bzw. $s = 0$ für Bosonen.

$$\langle A \rangle = \int da \; a \; W(a)$$ so wird Mittelwert berechnet

Realisierg. Wahrscheinlichkeit

$$\langle A \rangle = \sum_i a_i \; W(a_i)$$

<u>analog:</u>

$$\langle n_{ks} \rangle = \frac{1}{Z_{gk}} \dots \sum_{n_{ks}=0}^{1,\infty} n_{ks} \; e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu) n_{ks}} \dots$$

Normierg. f. Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{\cancel{\dots} \; \partial_{\beta\mu} \sum_{n_{ks}=0}^{1,\infty} e^{-\underline{\beta}(\varepsilon_k - \underline{\mu}) n_{ks}} \; \cancel{\dots}}{\cancel{\dots} \sum_{n_{ks}=0}^{1,\infty} e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu) n_{ks}} \; \cancel{\dots}}$$

$$\langle n_{ks}^F \rangle = \partial_{\beta\mu} \ln\left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}\right)$$

$$= \frac{e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}}{1 + e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}+1}$$

$$\underbrace{\langle n_{ks}^F \rangle = f_{ks}^F = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}+1}}_{\text{mittlere Zahl v. Fermionen in dem Einteilchenzustand } ks} \qquad \text{Fermiverteilung}$$

$$\langle n_{ks}^B \rangle = \partial_{\beta\mu} \ln\left(\frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}}\right)$$

$$= \frac{e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}-1}$$

$$\underbrace{\langle n_{ks}^B \rangle = f_{ks}^B = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}-1}}_{\text{mittlere Zahl v Bosonen in dem Einteilchenzustand } ks=0} \qquad \text{Boseverteilung}$$

3.4.3. Diskussion der mittleren Besetzungszahl $\langle n_{ks}^{F/B} \rangle$

a) Interpretation von $f^{F/B}$ ist:

mittlere Besetzungszahl oder „Verteilung" der Teilchen auf die Einteilchenzustände

$$f_{ks}^{F/B} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} \pm 1}$$

b) klassischer Grenzfall um Boltzmannverteilung ergeben:

$$\mu_{klass} = kT \ln\left(n_0 \lambda_{th}^3\right) \xrightarrow{\text{niedrige Dichte}} \text{stark negativ}$$

$\frac{N}{V}$ = Teilchendichte

und $e^{-\beta\mu} \xrightarrow[\text{klass}]{} e^{\beta|\mu|} \to$ sehr groß, „1" weglassen

$$f_{ks}^{F/B} = e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}$$ ist die Boltzmannverteilung des klassischen Gases

Fermionen und Bosonen sind nicht zu unterscheiden

$f_{ks}^{B} \ll 1$, weil $e^{\beta\mu} \ll 1$

Mehrfachbesetzung spielen kein Rolle, damit Pauliprinzip nicht wichtig

c) wie berechnet man $f^{F/B}$?

bekannt ist ε_k aus den Kasten $\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)$

bekannt ist T, β, von außen eingestellt

um $f^{F/B}$ zu zeichnen braucht man μ

$$\bar{N} = \sum_{k,s} f_{ks}^{F/B}(\mu, T) = \bar{N}(\mu, T)$$

mittlere Gesamtteilchenzahl durch Summe über mittlere Einteilchenbesetzungen

Umstellen von $\bar{N} = \bar{N}(\mu, T)$ nach $\mu = \mu(\bar{N}, T)$

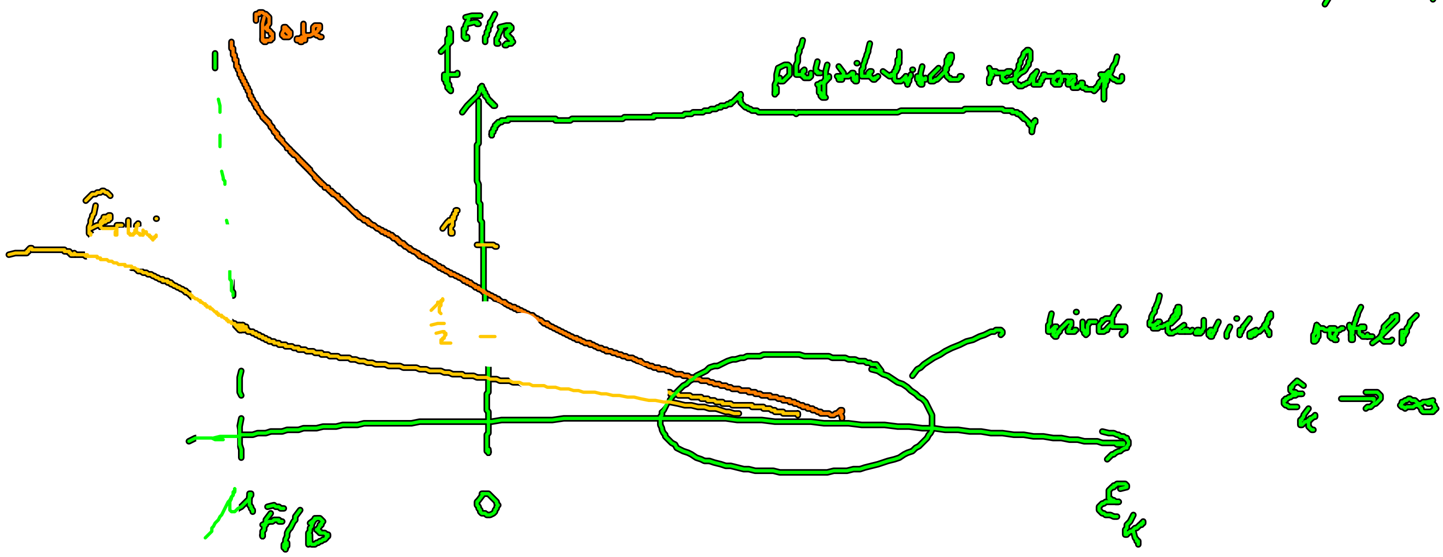
$\bar{N}$, T kann von außen festgelegt werden

$\Rightarrow$ μ ist auch bekannt

$f^{F/B}$ kann gezeichnet werden

d) Qualitatives Verhalten:

Vgl. von $f^F_{k,s}$ / $f^B_{k,s}$ für $\beta_F = \beta_B$, $\mu_F = \mu_B$



$\mu \leq 0$ muß immer bei Boseverteilg. d. Fall sein, aus physikalischen Gründen

$\to$ β, μ identisch passen in diesen Boskasten mehr Teilchen als in den Fermikasten, weil Mehrfachbesetzungen nur bei Bosonen erlaubt sind