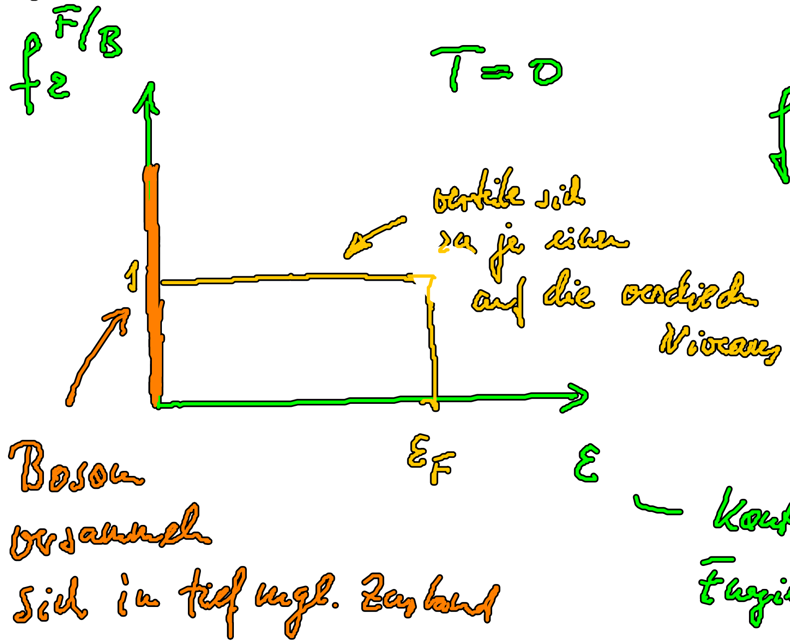
3.5. Quanteneffekte in bosonischen u. fermionischen Gasen

massive Teilchen, bei tiefen Temperaturen, hohen Dichten sollte Unterschied zwischen Fermionen u. Bosonen wichtig sein



$f^{F/B}$ = Verteilungsfunktion
Besetzungszahl

≙ mittlere Zahl von Teilchen im Energiezustand ε

ε — kontinuierliche Energie des Kastens

Bei Bosonen wird Druck verschwinden ($\varepsilon = 0 \Longleftrightarrow k = 0$, also keine Geschwindigkeit), bei Fermionen wird es weiterhin $p \neq 0$ geben (Alles f. $T = 0$).

3.5.1. Berechnung der Zustandsgleichung

Zustandsgleichg: $$\underbrace{E_{F/B} = \mu \bar{N} - \partial_\beta \ln Z_{gk}^{F/B}}_{\text{kalorische Zustandsgl.}}$$

$$\underbrace{\beta p = \partial_V \ln Z_{gk}^{F/B}}_{\text{thermische Zustandsgl.}}$$

Idee: $\bar{E}^{F/B}$ kann bereits berechnet werden

$$E_{F/B} = \sum_{k,s} \varepsilon_k f_k^{F/B}(\mu, T, V)$$, könnte im Prinzip berechnet werden

damit ist die kalorische Zstgl. ist damit gegeben

Trick: man kann auch die thermische über die kalorische Zstgl. ausdrücken: $p = \frac{2}{3} \frac{E_{F/B}}{V} \cdot$ Spinfaktor

ist zu zeigen!

1: Spin $= 0$

2: Spin $= \frac{1}{2}$

$$\beta p = \partial_V \ln Z_{gk}^{F/B} = \partial_V \pm \sum_{k_i, s} \underbrace{\ln\left(1 \pm e^{-\beta(\varepsilon_{k_i}(V) - \mu)}\right)}_{\text{letzte VL und 1}}$$

Konstante nach V differenziert $\to 0$

$$= (2) \sum_{k_i} \frac{e^{-\beta(\varepsilon_{k_i}-\mu)}}{1 \pm e^{-\beta(\varepsilon_{k_i}-\mu)}} (-\beta) \frac{\partial \varepsilon_{k_i}(V)}{\partial V}$$

Fermion $\hat{=} \sum_s$

ansonsten 1

$$\frac{\partial \varepsilon_{k_i}}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \sum_{j=1}^{3} \frac{k_i^{j\,2} \hbar^2}{2m} = \sum_j \partial_V \left(\frac{n_i^{j\,2} \pi^2 \hbar^2}{2m \underbrace{V^{2/3}}_{= L^2}} \right)$$

j: (x, y, z)

3d Kasten

$$= -\frac{2}{3} \sum_j \frac{n_i^{j\,2} \pi^2 \hbar^2}{2m\, V\, V^{2/3}} = -\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{k_i}}{V}$$

weiter in Formel f. βp

$$\beta p = (2) \sum_{k_i} f_{k_i}^{F/B} \left(-\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{k_i}}{V} \right) (-\beta)$$

$$\to p_{F/B} = (2) \frac{2}{3} \frac{E_{F/B}}{V}$$

, damit gezeigt dass es ausreicht E zu diskutieren um Zustandsgleichg. zu bestimmen.

Wie will man das Tieftemperaturverhalten diskutieren:
am besten als Fkt. von T, mittl. Teilchenzahl, bzw Dichte

Dichte $n_0 = \frac{\bar N}{V}$

im Moment $E = E(\mu, T, V)$

man muß das chemische Potential loswerden, um anschaulich zu diskutieren

man braucht $\mu = \mu(\bar N, V, T)$
$= \mu\left(\frac{\bar N}{V}, T\right)$

thermodyn. Limes

bekommt man aus:

$$\bar N = \sum_{sk} f_k^{F/B}(T, \mu, V)$$

bestimmt $\bar N$ aus abzählen aller mittleren Besetzungen

diese Gleichg. kann aufgelöst werden nach $\mu \to \mu = \mu\left(T, \frac{\bar N}{V}\right)$.

3.5.2. Ideales Bosonengas

μ ~ bestimmen um Verteilungsfkt $f_\varepsilon^F(\mu, T, V)$ zu verstehen

$$\bar{N} = \sum_k \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}-1}$$

möglichst μ bestimmen

$$= \sum_k \underbrace{\frac{e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}}{1-e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}}}_{\text{Ergebnis einer geometrischen Reihe}} = \sum_k \sum_{l=0}^{\infty}\left(e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}\right)^{l+1}$$

$$= \sum_k \sum_{l=1} e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)l}$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} e^{\beta\mu l} \sum_k e^{-\beta\varepsilon_k l}$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} e^{\beta\mu l} \underbrace{\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{-\beta\varepsilon_k l}}_{\text{Gaußintegral nachschlagen}}$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} e^{\beta\mu l}\, \frac{V}{\lambda_{th}^3}\, \frac{1}{l^{3/2}}$$

$$\bar{N} = \frac{V}{\lambda_{th}^3} \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{e^{\beta\mu\ell}}{\ell^{3/2}}}$$

Riemannsche Zetafunktion $g_{3/2}(e^{\beta\mu})$

über Potenzreihe definiert

$e^{\beta\mu}$ ist Argument : nennt man Virial $z = e^{\beta\mu}$

$$\lambda_{th}^3 n_0 = g_{3/2}(e^{\beta\mu})$$

Damit könnte man μ durch festlegen von n_0, T bestimmen.

$$\lambda_{th} = \lambda_{th}(m, T)$$

qualitative Diskussion $T \to 0$

(i) wissen $T \to \infty$ strebt $\mu \to -\infty$ im klass. Grenzfall

(ii) die Bosefkt. hat eine Singularität bei $\mu = \varepsilon_k$

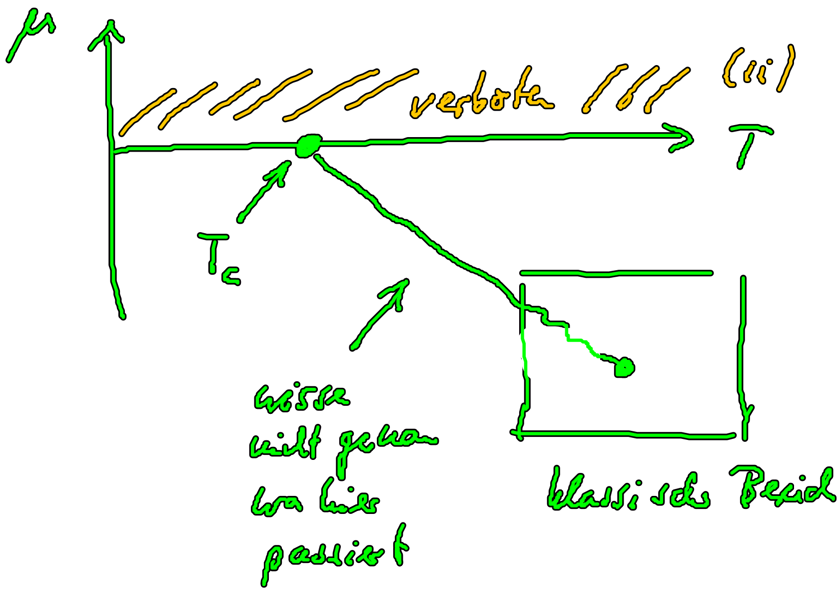
$$f_e^\beta = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_n - \mu)} - 1}$$

ε_k deckt alle positiven Werte ab

$$\rightarrow \quad \mu \leq 0$$

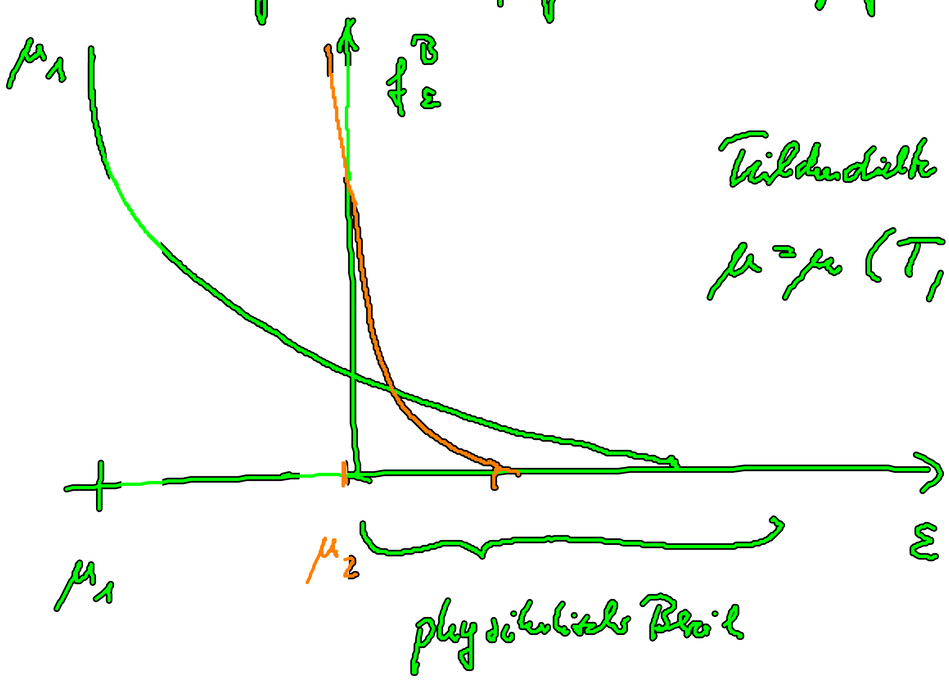
Damit die Besetzungszahlen nicht ∞ werden

„ — " muß gesondert diskutiert werden, ist aber zugelassen.



Offensichtlich bewegt sich μ für $T \to 0$ gegen eine Temperatur T_c (kritische Temperatur)

Daher ergeben sich folgende Verteilungsfunktionen:



Teilchendichte fest,

$\mu = \mu(T, n_0)$, T verändert

Offensichtlich steigt die mittlere Besetzungszahl f. tiefe Temperaturen $T \to T_c$ ins Unendliche wenn $\mu = 0$ erreicht wird.

Wie viele Teilchen sind in $\varepsilon = 0$, $k = 0$, wenn $\mu \to 0$ geht?

$$f_k^B = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}-1} = \left| \begin{matrix}\mu\to 0\\ \varepsilon_k\to 0\end{matrix}\right| = \frac{1}{1+\beta(\varepsilon_k-\mu)-1}$$

$$= \frac{1}{\beta(\varepsilon_k-\mu)} \longrightarrow \infty$$

f. $\varepsilon_k \to 0$
$\mu \to 0$

wird immer größer also sollte $\bar{N}$ immer größer werden.

soll aber im Mittel fest sein, möchte man $T\downarrow$ verändern

Wie trägt $\varepsilon_{k=0}$ $\mu = 0$ in $\bar{N}$ bei?

$$\bar{N} = \sum_k f_k^B = \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k \; f_k^B$$

$$= \frac{V\,4\pi}{(2\pi)^3}\int dk\, k^2 \frac{1}{(\varepsilon_k-\mu)\beta} \cdots \sim \frac{\cancel{k^2}\,dk}{\frac{\hbar^2\cancel{k^2}}{2m}} \sim dk$$

für $k \to 0$ auch

nur für $\varepsilon_k \to 0$, $\mu = 0$

Beitrag ist proportional zur Diskretisierung d. Integrals für $dk \to 0$ trägt $f_{k=0}$ überhaupt nicht bei!

Das ist falsch, liegt daran, daß wir Fehler machen bei Übersetzung der Summe $\sum_k f_k$ ins Integral $\int d^3k$!

Um das zu korrigieren muß man für $\mu = 0$ einen weiteren Term einführen:

$$\bar{N} = N_0 + \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \, f_k^{B}$$

bereits berechnet über Riemann Zeta-funktion

Anteil der Teilchen im niedrigsten E-Zustand

muß man nur, wenn $\mu = 0$ ist, sonst gilt alte Formel

Im thermodynamischen Grenzfall haben wir:

$$\frac{\bar{N}}{V} = \frac{N_0}{V} + \frac{g_{3/2}(z)}{\lambda_{th}^3}$$

$$n_0 = \rho_0 + \frac{g_{3/2}(z)}{\lambda_{th}^3}$$

Dichte der Teilchen im tiefsten Zustand

ρ_0 ist nur von Null verschieden wenn $\mu = 0$, ansonsten

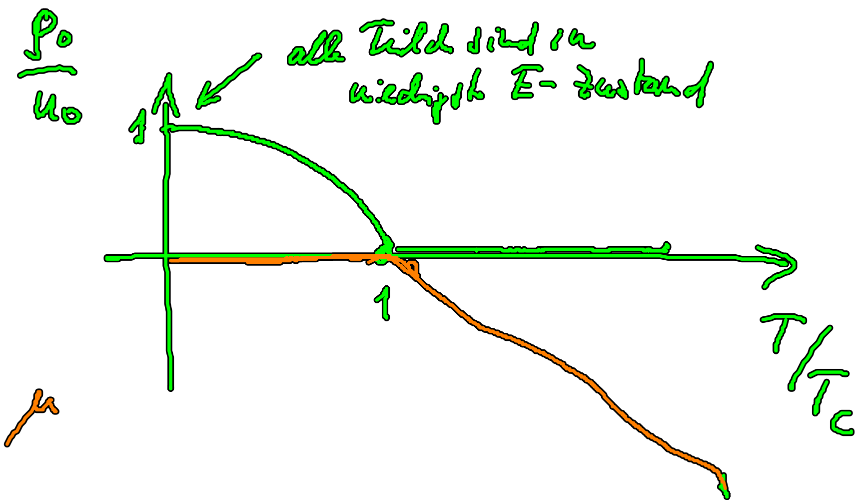
$\mu < 0$ muß der Term gestrichen werden.

Interpretation

- Relativer Anteil von ρ_0 zu Gesamtdichte n_0

$$\frac{\rho_0}{n_0} = 1 - \frac{g_{3/2}(z)}{n_0 \lambda_{th}^3} \qquad z = e^{\beta\mu}, \quad \frac{g_{3/2}(1)}{n_0} = \lambda_c^3$$

$$\frac{\rho_0}{n_0} = \begin{cases} 1 - \frac{g_{3/2}(1)}{n_0 \lambda_{th}^3} \quad (\mu = 0) = 1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_{th}}\right)^3 = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \\ \frac{\rho_0}{n_0} = 0 \quad (\mu < 0) \end{cases}$$



Wenn man ein bosonisches Gas abkühlt, so wird angefangen vom klass. Grenzfall das chemische Potential von stark negativen Werten sich auf die Null zubewegen.

Bei einer kritischen Temperatur:

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m k\, g_{3/2}(1)}\, n_0^{2/3} \qquad \text{(Def. von } \lambda_c \text{ oben)}$$

wird das chemische Potential $\mu = 0$.

Es bleibt bei einer weiteren Abkühlung Null.

Dabei erhöht sich die Zahl der Teilchen in $\varepsilon = 0$ bis bei $T = 0$ alle Teilchen sich in diesem tiefstmögl. E-Zustand befinden. Dieser Prozeß heißt Bose-Einstein-Kondensation.

Kondensation entspricht einem Phasenübergang (Übergang von Verteilung über viele Energie mit $\vec{v} \neq 0 \neq \vec{k}$ zu einer Phase in der $\vec{v} = 0 = \vec{k}$ angenommen wird)

Druck sollte hier verschwinden!

Dieser Effekt taucht nur f. Bosonen auf, im Gegensatz z. Fermionen.

$$p \sim \frac{E}{V} \sim \frac{1}{V}\sum_k \varepsilon_k f_k^B \xrightarrow[T\to 0]{} \frac{1}{V}\varepsilon_0 f_0^B + \cancel{\ldots}$$

$\to 0$ für die großen Kanten