3.5.3 Ideales Fermigas

Modellsystem für Elektronen im Festkörper u. Atomen
Nukleonen in Kern (Proton, Neutron)
Quarks in Nukleonen
flüssiges Helium (^3He)

Vorgehen in kompletter Analogie
zum Bosegas, zunächst μ bestimmen

Frage: Wie sind Tieftemperatureffekte im Vgl.
zum Bosegas ausgebildet.
(Studium der Verteilungsfunktion $\rightarrow \mu = \mu(T, n_0)$)

$$f^F_{\varepsilon_k} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1}$$

?

β, ε_k, bekannt ; μ unbekannt

μ wird bestimmt:

$$\bar{N} = \sum_{k,s} f^F_{ks} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1}$$

im Mittel festgelegt

zählt Gesamt-Zahl der Teilchen

implizite Gleichung für μ: $\mu = \left(\underset{n_0}{\frac{\bar{N}}{V}}, T\right)$

wenn man das umgestellt nach μ.

besser ist es das Integral über ε darzustellen

$$k \to \varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$d\varepsilon = \frac{\hbar^2 k}{m} dk = \frac{\hbar^2}{m} \sqrt{\varepsilon} \frac{(2m)^{1/2}}{\hbar} dk = \frac{\hbar\sqrt{2}}{\sqrt{m}} \sqrt{\varepsilon}\, dk$$

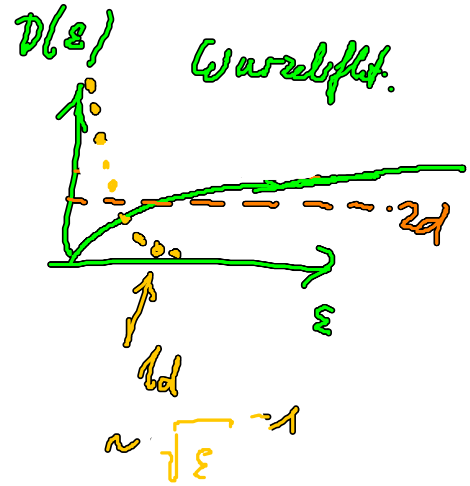
Spinsumme ↑↓

$$n_0 = \frac{2}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty dk\, k^2 f^F_{\varepsilon_k}$$

Kugelkoordinaten

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty d\varepsilon\, \frac{\sqrt{m}}{\hbar\sqrt{2}}\,(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\,\varepsilon\,\frac{2m}{\hbar^2}\, f_\varepsilon^F$$

$$n_0 \equiv \int d\varepsilon\, \underline{D(\varepsilon)}\, f_\varepsilon^F$$



$$D(\varepsilon) = \frac{1}{\pi^2}\,\frac{m^{3/2}\sqrt{2}}{\hbar^3}\,\sqrt{\varepsilon}$$

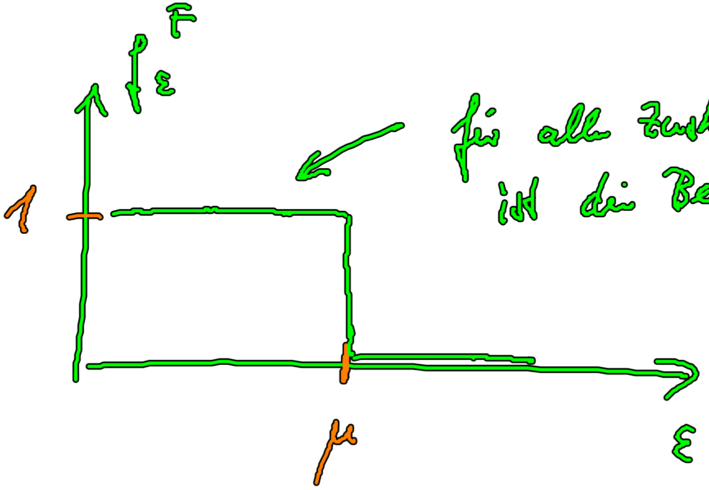
$D(\varepsilon)$ nennt man Zustandsdichte, wird daran erkannt, daß, wenn formal $f_\varepsilon^F \equiv 1$ setzt die Zustände pro E-Intervall zählt und dann alle aufsummiert.

Diskussion f. $T \to 0$

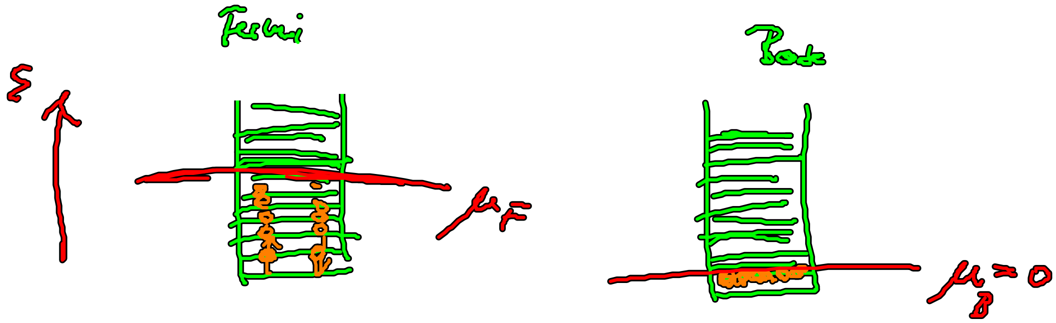
(i) $\underline{T=0}$

$$f_\varepsilon^F = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} \qquad T \to 0, \quad \beta \to \infty$$

$$= \begin{cases} \varepsilon < \mu(T=0): & e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \to 0 \Rightarrow f_\varepsilon^F = 1 \\ \varepsilon > \mu(T=0): & e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \to \infty \Rightarrow f_\varepsilon^F = 0 \end{cases}$$



für alle Zustände unterhalb von $\mu\,(T=0, n_0)$ ist die Besetzung gleich 1



$\rightarrow p \neq 0$ $\qquad\qquad$ $\rightarrow p = 0$

wie sieht $\mu = \mu\,(T=0, n_0)$ aus?

$$n_0 = \int_0^{\mu(T=0,n_0)} d\varepsilon\, D(\varepsilon) = \int_0^{\mu(T=0,n_0)} d\varepsilon\, \frac{1}{\pi^2}\,\frac{m^{3/2}\sqrt{2}}{\hbar^3}\sqrt{\varepsilon}$$

$\uparrow$
Dichte vorgegeben

$$n_0 = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3}\,\mu^{3/2}(T=0)$$

$$\mu\,(T=0, n_0) = \varepsilon_F = (3\pi^2)^{2/3}\,\frac{\hbar^2}{2m}\,n_0^{2/3}$$

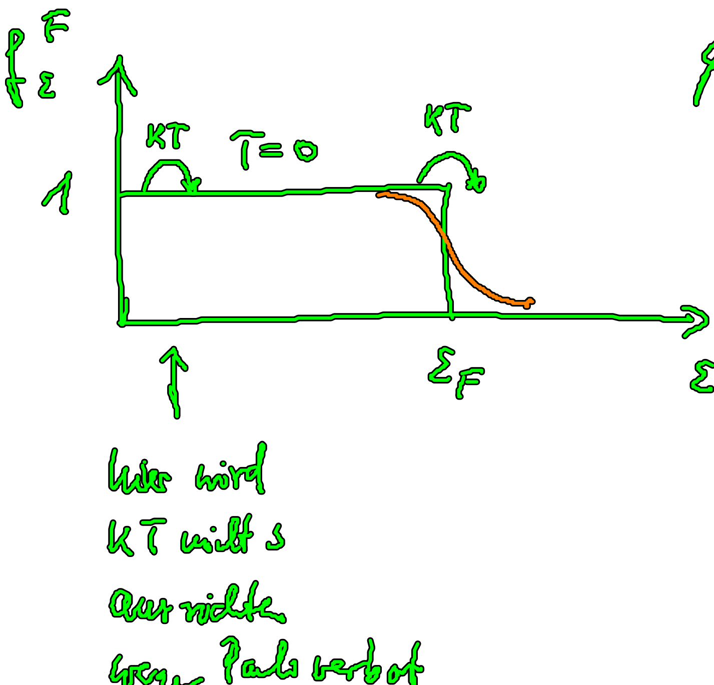
Das chemische Potential f. $T=0$

hat den Namen „Fermienergie".

Die Fermienergie wächst mit Dichte$^{2/3}$.

Damit ist $T=0$ Problem gelöst

(ii) Was erwartet man für etwas höhere Temperaturen, so daß man aber noch nicht klassische Eigenschaften reproduziert.



qualitativ!

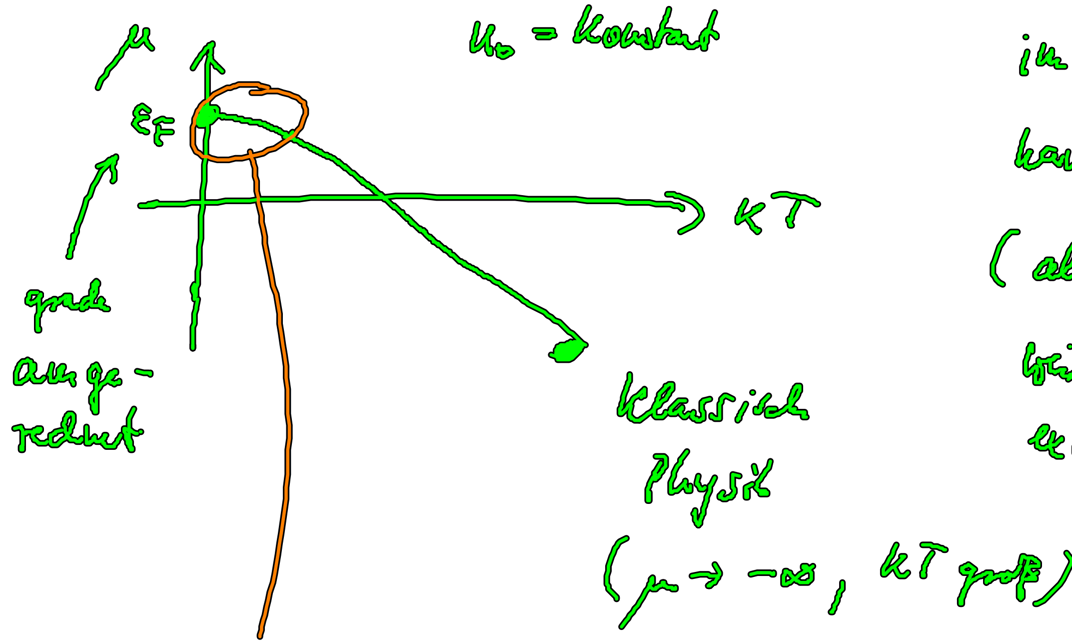
$kT \neq 0 \to$ thermische Energie

Ausschmieren der Fermikante

Um das zu beschreiben muß $\mu = \mu(T \neq 0, n_0)$

bestimmt werden

u_0 = konstant



im Gegensatz z. Bosonen kann $\mu > 0$ sein (alle Werte ≤ 0) weil keine Singularität existiert

Versuche das auszurechnen f. $kT \neq 0$, aber klein

verwende $u_0 = \int_0^\infty d\varepsilon\, D(\varepsilon)\, f_\varepsilon^F$ für kleine kT zu entwickeln

$$= \int_0^\mu d\varepsilon\, D(\varepsilon)\, f_\varepsilon^F + \int_\mu^\infty d\varepsilon\, D(\varepsilon)\, f_\varepsilon^F$$

$$= \int_\mu^\infty d\varepsilon\, D(\varepsilon)\, f_\varepsilon^F + \int_0^\mu d\varepsilon\, D(\varepsilon) \left(1 - \underbrace{\frac{1}{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}+1}}_{f^F}\right)$$

$f\varepsilon$

$$= \int_0^{\mu} d\varepsilon\, D(\varepsilon) + \int_0^{\infty} \frac{dx}{\beta} \frac{D(\mu + x/\beta)}{e^x+1} - \int_0^{\beta\mu} \frac{dx}{\beta} \frac{D(\mu - x/\beta)}{e^x+1}$$

Integralsubstitution: $x = \beta(\varepsilon - \mu)$

$x = -\beta(\varepsilon-\mu)$

$\beta \to \infty$

$$u_0 = \int_0^{\mu} d\varepsilon\, D(\varepsilon) + 0 + \int_0^{\infty} \frac{dx}{\beta} \frac{D'(\mu)}{e^x+1} \frac{x}{\beta} \cdot 2$$

f. $\beta \to \infty$ in Grenze und $\frac{x}{\beta} \to 0$.

1. Ordn. Taylor

beide Terme identisch

$$u_0 = \int_0^\mu d\varepsilon\, D(\varepsilon) + \frac{2}{\beta^2} D'(\mu) \frac{\pi^2}{12}$$

x - Integral nachschlagen

$D'(\varepsilon) \cong (\sqrt{\varepsilon})'$

$$u_0 = a \int_0^\mu d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{a}{2\sqrt{\mu}}$$

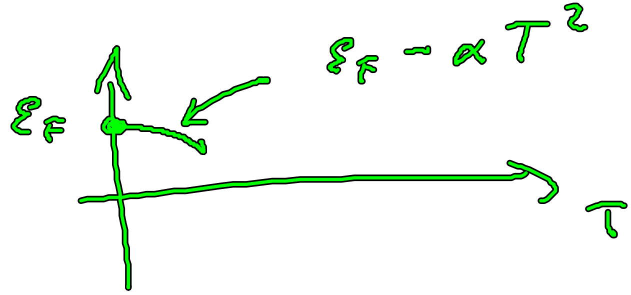
Vorfaktor $(m, \hbar, \dots)$

$$\left(\frac{2a}{3}\right) \varepsilon_F^{3/2} = \frac{2a}{3} \mu^{3/2} + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{a}{2\sqrt{\mu}}$$

implizite Gleichung f. $\mu \simeq \varepsilon_F + \delta\mu$

$$\longrightarrow \delta\mu = -\varepsilon_F \left(\frac{\pi^2}{12} \frac{(kT)^2}{\varepsilon_F^2} \right)$$

$$\mu = \varepsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \frac{(kT)^2}{\varepsilon_F^2} \right)$$



Bemerkungen

a) chemisches Potential bei Fermionen kann positiv/negativ sein

b) spezifische Wärme C_V eines Elektronengases

$$C_V = \frac{\partial E}{\partial T}\bigg|_V = \frac{\pi^2}{3} D(\varepsilon_F) T \sim T$$

man braucht E, kann man analog zu $\bar{N}$ für $T \to 0$ ausrechnen
$(D(\varepsilon) \to \varepsilon D(\varepsilon))$

$$E = \sum_{k,s} \varepsilon_k f^F_{ks}$$

ohne ε wäre das $\bar{N}(\mu_0)$ das wir gerade berechnet haben.

Aus der Rechnung für μ_0, mit $D(\varepsilon) \to \varepsilon D(\varepsilon)$ bekommt man wieder $\mu_0 \sim E \sim T^2$.

$\longrightarrow$ Die spezifische Wärme eines Elektronengases für $T \to 0$ ist proportional zu T.

Festkörper insgesamt: $C_V \sim c_1 T + c_2 T^3$

Elektron — Phononen

(einige Kelvin) — (gewöhnl. f. höhe T)

c) Druck und Zustandsgleichung:

$$\underbrace{p = (2)\,\frac{2}{3}\,\frac{E}{V}}_{\text{letzte VL}} \underset{T\to 0}{=} \frac{4}{3}\int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon\, \varepsilon\, D(\varepsilon) \sim \varepsilon_F^{5/2} \quad (\text{ÜA})$$

Druck und Energie verschwinden nicht bei $T=0$.

Folge d. Pauliverbots, das verbietet, dass El sich in ein und denselben Zustand / Ort aufhalten können.

Im Gegensatz zu Bosonen.

System muß ausgedehnt bleiben um Überlapp der Wellenfunktion zu vermeiden.

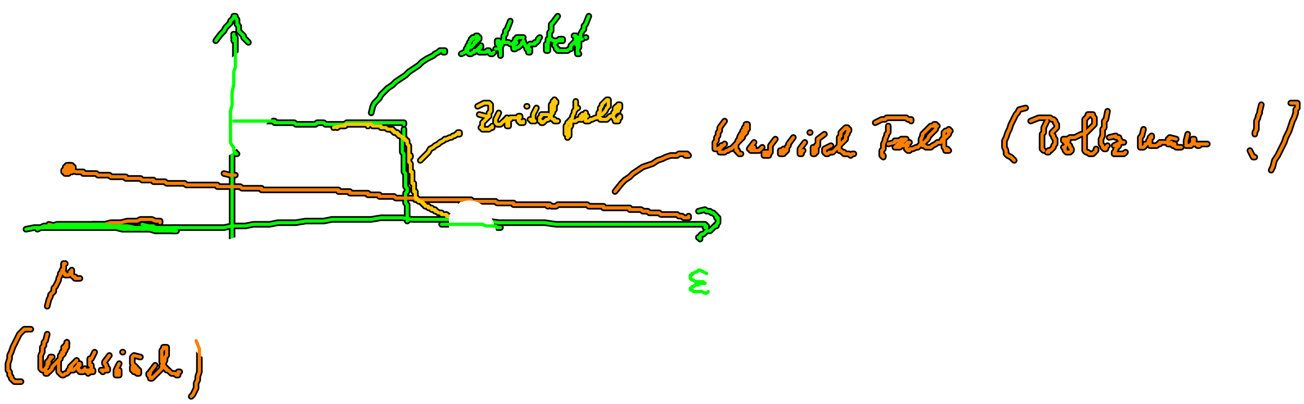
d) Entwicklg. / Gültigkeit $\varepsilon_F \gg kT$

Wann ist ein System kalt

$kT \ll \varepsilon_F$, unsere Betrachtungen gelten für

$\frac{kT}{\varepsilon_F}$ = klein! muss nicht unbedingt $T=0$ sein

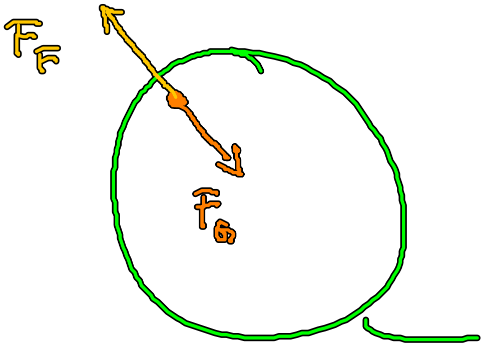
kalte Systeme wo man noch eine eher stufenartige Funktion hat nennt man entartet



Beispiel f. entartete Gase bei Zimmertemperatur:

Metalle! $\varepsilon_F \simeq 1\text{-}10\,\text{eV}$, $kT \approx \frac{1}{40}\,\text{eV}$

e) Himmelskörper im Gleichgewicht von Gravitation und Fermidruck:



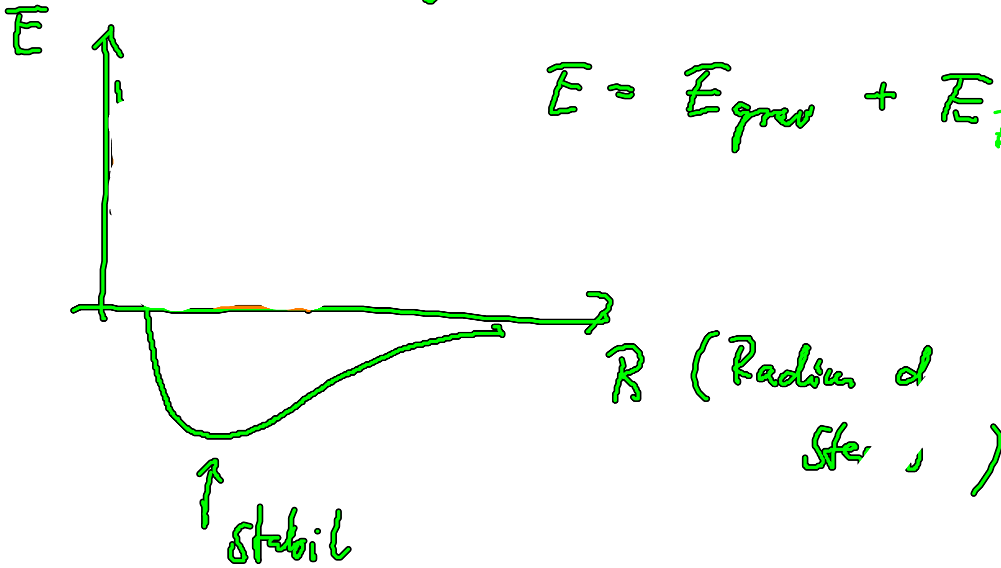
Stabil nur für
Gleichgewicht von Gravitation und
kinetischer Druck p

Sonne
Neutronenstern
als Fermigas

unsere Sonne: Gas als Boltzmann verteilt (nicht entartet)
kann Gravitationskraft kompensieren
kT ist recht hoch

Neutronenstern /
weiße Zwerge
(Elektronen): Gas als entartet weil Dichte so hoch ist und
$\varepsilon_F \to n_0^{2/3} \gg kT$
Schlimmer als Metall bei
Zimmertemperatur

Idee zur Berechng. d. Gleichgewichts:



$$E = E_{grav} + E_{Fermi}$$

$$E_{Fermi} \sim n_0^{2/3} \sim +R^{-2}$$

$$E_{grav} \sim \int d^3r \int d^3r' \frac{n_0(r)\, n_0(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \sim -R^{-1}$$