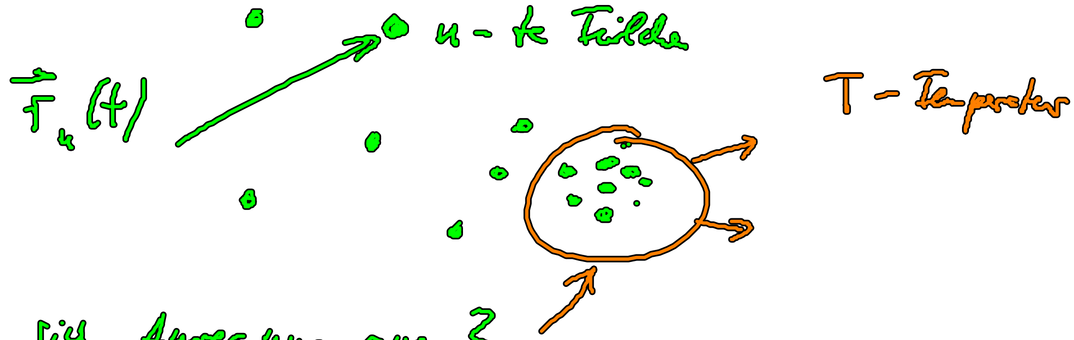
6) Auf statistischem Weg durch die klassischen Gleichungen der Physik

Geg.: klassisches System



Wie breiten sich Anregungen aus?

Diffusion — Wellenanregungen

$\underbrace{\text{Diffusion} \qquad \text{Wellenanregungen}}$

qualitativ verschieden,

kann man die fundamental ableiten?

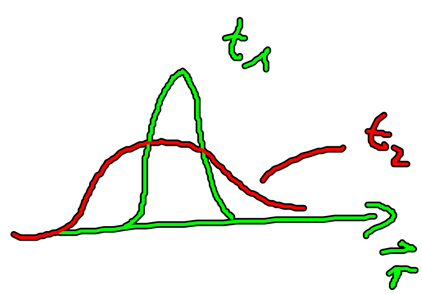
hier klassische Theorie, der Einfachheit halber

quantenmechanisch geht das auch, nahezu analog, aber komplizierter.

Suchen:

$n(\vec{r},t) = ?$ gesucht

Dichte des Gases von Ort, Zeit



Stellen die Gleichung f. Massedichte $\rho(\vec{r},t)$ und

Massestromdichte: $\vec{j}(\vec{r},t)$. analog Elektrodynamik

Masse $\longleftrightarrow$ Ladung

$$\rho(\vec{r},t) = \Big\langle \sum_n m_n \,\delta(\vec{r}-\vec{r}_n(t)) \Big\rangle$$

Mittelung, um zu verschmieren und statistische Aussagen zu machen

Masse des n-ten Teilchens

Bahnkurve

$$\left(\underset{ED}{m_n \longleftrightarrow q_n}\right)$$

$$j(\vec{r},t) = \Big\langle \sum_n m_n \dot{\vec{r}}_n \,\delta(\vec{r}-\vec{r}_n(t)) \Big\rangle$$

Geschwindigkeit

Geschwindigkeitsfeld

Ziel ist Feldgleichungen für $\rho(\vec{r},t)$ und $\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\,\vec{u}(\vec{r},t)$

zu finden aus $m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n$ der klassischen Newtongl.

äußere u. innere Kräfte

(Gravitation)

$$\partial_t \rho(\vec{r},t) = \Big\langle \sum_n m_n \; -\dot{\vec{r}}_n \cdot \vec{\nabla}_r \,\delta(\vec{r}-\vec{r}_n(t)) \Big\rangle$$

innere Ableitung

Vektorgradient als äußere Ableitung

$$= -\vec{\nabla}_r \cdot \Big\langle \sum_n m_n \dot{\vec{r}}_n \,\delta(\vec{r}-\vec{r}_n(t)) \Big\rangle$$

kann aus ζ ?
heraus genommen werden

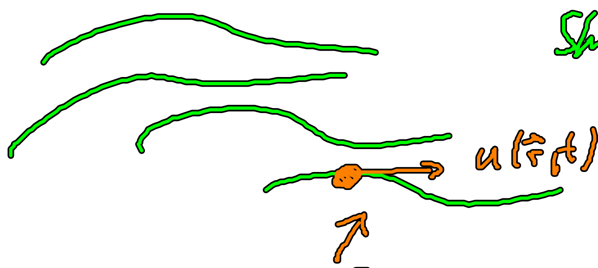
Kontinuitätsgleichung für Massendichte / Massenstromdichte:

$$\partial_t \rho(r,t) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r},t)$$

konsistente Definition der ρ, j.

damit ist die Gleichg. für ρ da, es fehlt noch die Gleichg. f. $\vec{j}$:

Ansatz:



Stromlinie des „fließenden" Gases

Bewegung eines Partikelchens
am Ort $\vec{r}$ gibt mir eine
Geschwindigkeit am Ort $\vec{r}$ zur Zeit t

Damit ist ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(\vec{r},t)$ definiert.

Ansatz: $\vec{j}(r,t) = \vec{u}(\vec{r},t)\,\rho(\vec{r},t)$

$\vec{u}(\vec{r},t)$ damit definiert und es muß
eine Gleichg dafür hergeleitet werden

$\vec{j}, \rho \quad \longrightarrow \quad \underbrace{\vec{u}, \rho}$

dies ist ein Satz hydrodynamischer Variablen,
genügen die hydrodynamischen Gleichungen

Sinnhaftigkeit des Ansatzes wird gezeigt

gehe $\vec{j} \to \vec{u}$ + Glchg. für $\vec{u}$ ableiten:

Definition/Ansatz

(1) $$\partial_t j_i = \partial_t (\rho u_i) = (\partial_t u_i)\rho + u_i(\partial_t \rho)$$

i-te Komponente von j

$$\partial_t j_i = (\partial_t u_i)\rho - u_i \overbrace{\partial_j u_j \rho}^{\hat{=}\, \vec{\nabla}\cdot\vec{j}}$$

(1. Mglk. $\partial_t j_i$ darzustellen)

(2) $$\partial_t j_i = \partial_t \left\langle \sum_n m_n \dot{r}_{n_i}(t)\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \right\rangle$$

i-te Komponente der Bewegg. des n-ten Teilchens

$$= \left\langle \sum_n \left(F_i(\vec{r}_n)\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) - \dot{r}_{n_i} m_n \partial_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t))\, \dot{r}_{n_j}(t) \right) \right\rangle$$

Kraftdichte einführen $\quad \frac{F_i}{m_n} = f_i \quad$ ($f_i \hat{=}$ Kraftdichte)

(2. Mglk. $\partial_t j_i$ darzustellen)

(1) = (2) setzen:

$$\rho \partial_t u_i - u_i \partial_j (u_j \rho) = f_i(r,t)\rho - \partial_j \underbrace{\left\langle \sum_n m_n \dot r_{ni} \dot r_{nj} \delta(\vec r - \vec r_n) \right\rangle}_{\text{wenn man das hier als Funktion von } \rho, \vec u \text{ darstellen könnte, wäre man fertig.}}$$

Kraftdichte variiert schwach über Mittelungsvolumen

Problem: $\rho \xrightarrow{\text{koppelt}} \vec j / \vec u \to \langle \dot{\vec r} \dot{\vec r} \dots \rangle$

„kinetische Energie“

immer höhere Momente von $\dot{\vec r}$ koppeln an

$\hat{=}$ Hierarchieproblem

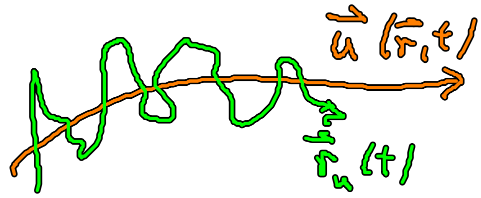
um das zu lösen, müssen Näherungen gemacht werden

dazu:

Bewegg. um „mittlere“ Strömg.

$$\dot{\vec r}_n(t) = \vec u(\vec r,t) + \delta\dot{\vec r}_n(t)$$

im allgemeinen muß das als klein angenommen werden.



$\langle \dot{r}_{n_i} \dot{r}_{n_j} \delta(\cdots) \rangle$ enthält:

$(u_i + \delta \dot{r}_{n_i})(u_j + \delta \dot{r}_{n_j}) \sim$

$\underline{u_i u_j} \longrightarrow$ sind schwach veränderliche Felder über $\vec{r}$
zieht man aus Mittlg. raus

$u_i \delta \dot{r}_{n_j} \longrightarrow$ Mittlg. über Fluktuation $\delta \Longrightarrow 0$

$\underline{\delta \dot{r}_{n_i} \delta \dot{r}_{n_j}} \longrightarrow$ wird Drucktensor verkauft

$$\partial_j \langle \sum_n m_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \dot{r}_{n_i} \dot{r}_{n_j} \rangle = \underline{\partial_j (u_i u_j \rho)} + 0 + \partial_j p_{ij}$$

$$\underbrace{p_{ij} \equiv \langle \sum_n m_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \delta \dot{r}_{n_i} \delta \dot{r}_{n_j} \rangle}$$

Definition des Drucktensors

alle Gleichg. sammeln (1) = (2) :

$$\rho \partial_t u_i - u_i \partial_j (u_j \rho) = f_i \rho - \partial_j (\rho u_i u_j) - \partial_j p_{ij}$$

$$\underbrace{\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i = f_i - \frac{1}{\rho} \partial_j p_{ij}}$$

das ist die gesuchte Gleichg. für $\vec{u} = (u_i)$

Interpretation von p_{ij}:

nur: Diagonalelemente:

$$p_{ii} = \langle \sum_n m_n \, \delta\dot{r}_{ni}^2 \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \rangle$$

$$= 2 \underbrace{\langle \sum_{n,i} \frac{m_n}{2} \delta\dot{r}_{ni}^2 \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \rangle}_{\text{kinet. Energie die in der Teilchenbewegung des Gases steckt}} \frac{1}{3}$$

↖ f. homogene System über 3 Raumrichtung

$$\left.\frac{E_{kin}}{V}\right|_{\text{Gas in Ruhe}} = \frac{3}{2} \frac{N}{V} kT$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \frac{N}{V} kT$$

$$= n kT = \underline{\underline{P}}$$

↗ Druck des idealen Gases

p_{ij} hat was mit Druck zu tun!

Damit ergibt sich insgesamt die hydrodynamische Glchg:

1) Kontinuitätsgleichung: $\partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\rho) = 0$

2) Navier-Stokes-Gleichung: $\partial_t \vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p$

$$p_{ij} = \delta_{ij} p_{ij} = p_{ii}$$

System v. Glchgn f. Flüssigkeit, Gas, deformierbare Festkörper

Reibung wird phänomenologisch berücksichtigt durch

$-\gamma \vec{u}$ auf d. rechte Seite der Navier-Stokes gl.

p muß bekannt sein als Funktion von $\rho(r,t)$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ (\vec{r},t)}}{p} = \frac{N}{V} kT = m \underset{\substack{\uparrow \\ (\vec{r},t)}}{\rho} kT$$

„lokales Gleichgewicht“ (weil p im GG. berechnet wurde)

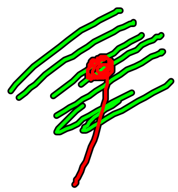
diese Gleichungen sind schwierig, nichtlinear:

$\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} \;\hat{=}\;$ <u>Turbulenz</u>

wichtig wenn $\vec{u}$ sehr groß

ohne Turbulenz liefert wir sowohl Diffusion als auch Welle aus :

<u>a) ohne Reibung</u> $\longrightarrow$ Wellenlösungen



homogenes Medium (ruhend)

Störg.

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho$$
$$\vec{u} = 0 + \delta\vec{u}$$
$$p = p_0 + \delta p$$

$$\delta = \delta(\vec{r}, t)$$

<u>Kontinuität :</u> $\partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0$

linearisiert : $\partial_t \delta\rho + \vec{\nabla}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\rho_0) = 0$

<u>Navier-Stokes :</u> $\partial_t \vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$

linearisiert : $\partial_t \delta\vec{u} + 0 = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}\delta p$

$$\partial_t^2 \delta\rho + \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\delta p) = 0$$

$$\partial_t^2 \delta\rho - \Delta\delta p = 0$$

Zustandsgleichung : $p = p(\rho)$

$$p = p_0 + \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)}_{[v^2]} \delta\rho$$

Dimension Geschw.^{2}

$$\partial_t^2 \, \delta\rho - v^2 \Delta \delta\rho = 0$$

$$\Delta \delta\rho - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \delta\rho = 0$$

Wellengleichg. f. Dichteausbreitung mit Geschwindigkeit v :

$$v^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \underset{\text{ideales Gas}}{=} \frac{\partial \frac{\rho}{m} kT}{\partial \rho} = \frac{kT}{m}$$

Geschwindigkeit ist temperaturabhängig!

b) mit Reibung $\longrightarrow$ Diffusionsgleichg.

Kontinuität $\quad \partial_t \delta\rho = -\vec{\nabla}(\delta\vec{u}\,\rho_0)$

Navier-Stokes: $\quad \partial_t \delta\vec{u} = -\frac{v^2}{\rho_0} \vec{\nabla} \delta\rho - \gamma\, \delta\vec{u}$

wichtig

$\gamma \, \delta\vec{u} \gg \partial_t \, \delta\vec{u}$ aus (a)

$$\delta\vec{u} = -\frac{v^2}{\rho_0 \gamma} \vec{\nabla} \delta\rho$$

einsetzen in Kontinuität:

$$\partial_t \delta\rho = \vec{\nabla} \cdot \frac{v^2}{\gamma} \vec{\nabla} \delta\rho$$

$$\partial_t \delta\rho = \frac{v^2}{\gamma} \Delta \delta\rho$$

ist eine Diffusionsgleichung mit der

Diffusionskonstante $\underline{D} = \frac{v^2}{\gamma} \sim \underline{kT}$ (Einsteinrelation)