2.2 Operatoren im Hilbertraum

Eigenwertgl. in $\underline{r}$-Darstellung des Impulsop. $\hat{\underline{p}}$

$$\frac{\hbar}{i}\underline{\nabla}\langle\underline{r}|\underline{p}\rangle = \underline{p}\langle\underline{r}|\underline{p}\rangle$$

Mult. mit $|\underline{r}\rangle$ u. Integr.

$$\underbrace{\int d^3r\, |\underline{r}\rangle \left(\frac{\hbar}{i}\underline{\nabla}\right)\langle \underline{r}|}_{\hat{\underline{p}}}\underbrace{\underline{p}\rangle} = \underline{p} \underbrace{\int d^3r\, |\underline{r}\rangle\langle \underline{r}|}_{1}\underbrace{\underline{p}\rangle}$$

$$\hat{\underline{p}}\,|\underline{p}\rangle = \underline{p}\,|\underline{p}\rangle$$

mit dem <u>abstrakten</u> Impuls-Op.

$$\boxed{\hat{\underline{p}} := \int d^3r\, |\underline{r}\rangle \left(\frac{\hbar}{i}\underline{\nabla}\right)\langle \underline{r}|}$$

Sei: $F(\underline{r},\underline{p})$ eine klass. Obs.

$$F(\underline{r},\underline{p}) \longrightarrow \hat{F}\left(\underline{r}, \frac{\hbar}{i}\underline{\nabla}\right)$$

$$\boxed{\hat{F} = \int d^3r\, |\underline{r}\rangle \hat{F}\left(\underline{r}, \frac{\hbar}{i}\underline{\nabla}\right)\langle \underline{r}|}$$

Umkehrung: $\hat{F}$ geg., $|\phi\rangle = \hat{F}\,|\psi\rangle$

$$\Rightarrow \langle \underline{r}|\phi\rangle = \langle \underline{r}|\hat{F}\underset{\uparrow \atop 1}{|}\psi\rangle = \underbrace{\int d^3r'}\langle \underline{r}|\hat{F}\underbrace{|\underline{r}'\rangle\langle \underline{r}'|}\psi\rangle$$

$$\boxed{\phi(\underline{r}) = \int d^3r'\langle \underline{r}|\hat{F}|\underline{r}'\rangle\, \psi(\underline{r}')}$$

i.a. werden Op. i. einer Darstellung zu <u>linearen Integralop.</u> (nichtlokal!)

Für die Ortsdarstell. für 1 Teilchen im (lok.) Pot.:

$$\langle \underline{r}|\hat{F}|\underline{r}'\rangle = \delta(\underline{r}-\underline{r}')\,\hat{F}\left(\underline{r}, \frac{\hbar}{i}\underline{\nabla}\right) \quad *$$

(<u>lokaler</u> Diff. op.)

Ortsop. $\hat{\underline{r}}\,\psi(\underline{r}) = \underline{r}\,\psi(\underline{r})$ (multiplikativ)

$$\underbrace{\hat{\underline{r}}}_{\text{Op.}}\langle \underline{r}|\psi\rangle \overset{!}{=} \underbrace{\underline{r}}_{\text{EW}}\langle \underline{r}|\psi\rangle$$

$$\langle \underline{r}|\hat{\underline{r}}|\psi\rangle = \int d^3r' \underbrace{\langle \underline{r}|\hat{\underline{r}}|\underline{r}'\rangle}_{*}\langle \underline{r}'|\psi\rangle \overset{!}{=} \underline{r}\,\langle \underline{r}|\psi\rangle$$

$$\boxed{\langle \underline{r}|\hat{\underline{r}}|\underline{r}'\rangle = \underline{r}\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$$

Impulsdarst. : $|\phi\rangle := \hat{\underline{r}}|\psi\rangle$

$$\phi(\underline{p}) \equiv \langle \underline{p}|\phi\rangle = \langle \underline{p}|\hat{\underline{r}}|\psi\rangle$$

$$\phi(\underline{p}) = \int d^3r \underbrace{\langle \underline{p}|\underline{r}\rangle}_{(2\pi\hbar)^{-3/2} e^{-i\frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{\hbar}}}\underbrace{\langle \underline{r}|\hat{\underline{r}}|\psi\rangle}_{\underline{r}\langle \underline{r}|\psi\rangle} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3r\, \underbrace{\underline{r}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{p}\underline{r}}}_{-\frac{\hbar}{i}\nabla_p\left(e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{p}\underline{r}}\right)} \langle \underline{r}|\psi\rangle$$

$$= -\frac{\hbar}{i}\nabla_p\left[\langle \underline{p}|\psi\rangle\right]$$

$$= -\frac{\hbar}{i}\nabla_p\,\tilde{\psi}(\underline{p})$$

$\tilde{\psi}(\underline{p}) = \langle \underline{p}|\psi\rangle$

$\psi(\underline{r}) = \langle \underline{r}|\psi\rangle$

bracket

Also $\boxed{\hat{\underline{r}} \longrightarrow -\frac{\hbar}{i}\nabla_p}$ in der Impulsdarst.

Energiedarstellung

Sei in der Ortsdarstellung $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$

mit Eigenfkt.en $\hat{H}\varphi_n(x) = E_n \varphi_n(x) \quad n = 0, 1, ..$

$$\hat{H}\left(\underline{x}, \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)\langle x | n\rangle = E_n \langle x | n\rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |x\rangle \hat{H}\left(x, \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)\langle x|}_{= \hat{H}} n\rangle = E_n |n\rangle$$

Orthonormieren:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi_m^*(x)\varphi_n(x) = \underbrace{\int_{-\infty}}^{\infty} dx \langle m | \underbrace{x\rangle \langle x}| n\rangle = \langle m | n\rangle$$

$$\boxed{\langle m | n\rangle = \delta_{mn}}$$

Häufig (!) ist die Energiedarst. <u>vollständig</u>

(z.B. 1-dim. harm. Osz)

$$\langle x | \psi\rangle = \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \psi\rangle \langle x | n\rangle$$

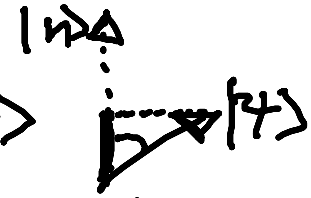
$$\langle x | \psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x | n\rangle \langle n | \psi\rangle$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}}$$

Hamilton-Op.:

$$\boxed{\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{H} |n\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \underbrace{|n\rangle\langle n|}}$$

Proj.-Op.
auf den n-ten
Eigenzustand



<u>Allg.</u>: $\quad \sum_n |n\rangle\langle n|\psi\rangle$

Qm. Obs. $\longrightarrow$ lineare Op. im Hilbertraum $\hat F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$\hat F\left(\lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle\right) = \lambda_1 \hat F|\psi_1\rangle + \lambda_2 \hat F|\psi_2\rangle$$

<u>Def.</u>: zu $\hat F$ <u>adjungierter Op.</u> $\hat F^+$ ist def. durch

$$\hat F|\psi\rangle = |\phi\rangle \iff \langle\psi|\hat F^+ = \langle\phi|$$

$$(\psi_1, \hat F\psi_2) = (\hat F^+\psi_1, \psi_2)$$

<u>Def.</u>: Ein lin. Op. $\hat F$ heißt <u>selbstadjungiert</u> (<u>hermitesch</u>), falls $\hat F = \hat F^+$

$$(\psi_1, \hat F\psi_2) = (\hat F\psi_1, \psi_2)$$

Die lin. Op. bilden eine <u>Algebra</u>, wobei die Multiplikation def. ist durch

$$(\hat F \cdot \hat G)|\psi\rangle := \hat F\left(\hat G|\psi\rangle\right)$$

Einheitsop. $\underline{1}$: $1 \cdot \hat F = \hat F \cdot 1 = \hat F$

Nullop. $\mathcal{O}$: $\mathcal{O} \cdot \hat F = \hat F \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$

Kommutator $[\hat F, \hat G] := \hat F \cdot \hat G - \hat G \cdot \hat F$

Es gilt: (i) $(\hat F \cdot \hat G)^+ = \hat G^+ \cdot \hat F^+$

(ii) $\hat F^{++} = \hat F$

Matrixelement $\langle \psi_1 | \hat{F} | \psi_2 \rangle$

hermitesche Op.: $\underbrace{\langle \psi_1}_{} | \underbrace{\hat{F} | \psi_2 \rangle}_{} = \langle \psi_2 | \hat{F} | \psi_1 \rangle^*$

$$F_{ij} = F_{ji}^*$$

Erwartungswerte

$$\langle \hat{F} \rangle = \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle$$

Erwartungswerte hermite'scher Op. sind reell:

$$\langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle^*$$

$\Rightarrow$ Phys. Obs. durch hermitesche Op. darstellen!

1.3 Eigenwerte u. Eigenzust. von hermiteschen Op.

<u>Annahme</u>: Eine phys. Obs. F habe im Zustand $|\psi\rangle$ einen <u>scharfen</u> Wert

qm. Unschärfe $\langle (\Delta \hat{F})^2 \rangle = \langle (\hat{F} - \langle \hat{F} \rangle)^2 \rangle$

$$= \langle \hat{F}^2 \rangle - \langle \hat{F} \rangle^2 \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \hat{F} |\psi\rangle = \alpha |\psi\rangle$ d.h. $|\psi\rangle$ Eigenzustand

<u>Theorem 1</u>: Eigenwerte hermite'scher Op. sind reell.

Theorem 2 : Eigenzustände hermite'scher Op.
zu verschiedenen Eigenwerten
sind orthogonal

bei Entartung : Eigenraum mit Dim $d > 1$
zu einem Eigenwert

$\rightarrow$ Eigenzustände können orthonormiert gewählt werden (Schmidt'sche Orthogonalisierung)

$$\boxed{\langle n, \beta' | m, \beta \rangle = \delta_{mn} \delta_{\beta' \beta}}$$

Theorem 3 : Zwei hermite'sche Op $\hat{F}, \hat{G}$
kommutieren genau dann, wenn
sie ein gemeinsames System von
Eigenzuständen besitzen.

Def. : Ein lin. Op. $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ heißt
unitär, falls

$$U^+ U = U U^+ = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad U^+ = U^{-1}$$

Skalarprodukt ist bei unitären Trafo invariant

$\Rightarrow$ Unitäre Op. transformieren von einer Basis
(vollst. ONS) in eine andere

Trafo in die Eigenbasis eines Op. $\hat{F}$

$$\langle \phi' | \hat{F}' | \psi' \rangle = \langle \phi | U^+ \hat{F}' U | \psi \rangle = F_\psi \delta_{\phi\psi}$$

falls Eigenbasis

$$\boxed{\begin{aligned} |\psi\rangle &= U^+ |\psi'\rangle \\ \hat{F} &= U^+ \hat{F}' U \end{aligned}}$$