1.4 Die Quantisierung

Physikal. Observable $\longrightarrow$ hermite'sche Op. im Hilbertraum z.B. Ort $x \longrightarrow \hat{x}$

Geschwindigk. $\dot{x} \longrightarrow \hat{\dot{x}} := \frac{\hat{p}_{kin}}{m} = \frac{\hat{p} - eA}{m}$

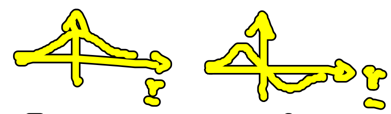
Parität $\hat{P}$ Spiegelungsop.

(definiert in der Ortsdarst. durch

$\hat{P}\psi(\underline{r}) := \psi(-\underline{r})$

allg. $\hat{P}|\underline{r}\rangle := |-\underline{r}\rangle$

$\hat{P}|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle$



für symm. antisymm. Zustände

$\Rightarrow$ Eigenwerte ± 1

Es gilt $\hat{P}^2 = \mathbb{1}$

$\hat{P}^{-1} = \hat{P}^{*} = \hat{P}$)

„Ist das System im Zustand $|\psi\rangle$?" $\longrightarrow \hat{P}_\psi := |\psi\rangle\langle\psi|$ Proj.op.

($\hat{P}_\psi|\psi\rangle = |\psi\rangle\underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{1}$ Eigenwert 1

$\hat{P}_\psi|\phi\rangle = |\psi\rangle\underbrace{\langle\psi|\phi\rangle}_{0}$ Eigenwert 0

0 falls $\langle\psi| \perp \langle\phi|$

Allg.: Durch $\hat{P}_\psi \cdot \hat{P}_\psi = \hat{P}_\psi$ ist ein Proj. definiert)

Vertauschungsrelationen

Op.kalkül ermöglicht Beschreibung mit nicht vertauschbaren Observablen:

$[\hat{F},\hat{G}] = 0 \iff \hat{F}$ und $\hat{G}$ besitzen gemeinsames System von Eigenzuständen

$\Longleftrightarrow$ Observable F und G zugleich scharf messbar

$[\hat F, \hat G] \neq 0 \Longleftrightarrow$ F und G <u>nicht zugleich</u> scharf messbar

$\Longleftrightarrow$ Beschreibung der qm. Unschärfe

<u>Quantisierung</u> $\hat{=}$ Aufstellung von Vertauschungsrelationen

Kanon. Vertauschungsrelationen:

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat p_i, \hat x_k] &= \frac{\hbar}{i}\delta_{ik}\mathbb{1} \\ [\hat p_i, \hat p_k] &= [\hat x_i, \hat x_k] = 0 \end{aligned}}$$

$i = 1,2,3$

kartes. Koord.

$$\left([\hat p_i, \hat x_k]\psi(r) = \frac{\hbar}{i}\partial_i(x_k\psi) - x_k \frac{\hbar}{i}(\partial_i\psi) = \frac{\hbar}{i}\delta_{ik}\psi \right)$$

$\Longrightarrow$ alle weiteren Kommutatoren berechnen

<u>Messprozess</u>: $\underset{\text{beliebig}}{|\phi\rangle} \xrightarrow[\text{von } \hat F]{\text{1. Messung}} |\phi'\rangle \xrightarrow[\text{von } \hat F]{\text{2. Messung}} |\phi''\rangle$

Zustandsänderung durch WW mit Messapparat

Messwert F' F''

Forderung: $F' = F''$ $\Longrightarrow$ $F' = F'' = F_n$ Eigenwert

$|\phi'\rangle = |\phi''\rangle = |n\rangle$ = Eigenzustand von $\hat{F}$

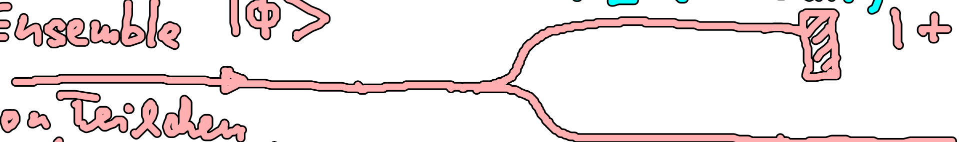
Also $|\phi\rangle \longrightarrow |n\rangle$

„Reduktion des Zustandsvektors durch Messung"

Beispiel: Stern-Gerlach-App.

$\uparrow \underline{B}$ (inhom.)

Ensemble $|\phi\rangle$ von Teilchen mit magn. Moment m_s



$|+\frac{1}{2}\rangle$

$|-\frac{1}{2}\rangle$ Eigenzustand zu $m_s = -\frac{1}{2}$

Erwartungswert = Mittelwert über viele Messungen mit identisch präpariertem Ausgangszustand $|\psi\rangle$

$$\langle \underset{\uparrow \atop 1}{\psi|} \hat{F} \underset{\uparrow \atop 1}{|\psi\rangle} = \sum_{n,n'} \langle\psi|n\rangle \underbrace{\langle n|\hat{F}|n'\rangle}_{F_n \delta_{nn'}} \langle n'|\psi\rangle$$

$$= \sum_n F_n \, |\langle n|\psi\rangle|^2$$

Wahrscheinlichkeit, im Zustand $|\psi\rangle$ (vor der Messung) den Messwert F_n zu messen $|\langle n|\psi\rangle|^2$

$$= \langle\psi\underbrace{|n\rangle\langle n|}_{\hat{P}_n}\psi\rangle = \langle \hat{P}_n \rangle$$

Schreibweise mit Projektionsop.: $\boxed{|\langle n|\psi\rangle|^2 = \langle \hat{P}_n \rangle}$

Maximalmessung

Es können i.a. nicht alle Obs. zugleich scharf gemessen werden.

gleichzeitige Messung eines vollständigen Satzes vertauschbarer Obs.: Maximalmessung

„Vollständig": ex. keine weitere unabh. Obs., d.h. die gemeinsamen Eigenzust. sind nicht entartet.

Bei Entartung: weitere vertauschbare Op. hinzufügen, bis die gemeinsamen Eigenräume eindimensional sind

$\Rightarrow$ Zustand $|n, \alpha, \ldots\rangle$ ist durch Maximalmessung vollständig bestimmt

Spezialfall: Falls Energie-Eigenwerte nicht entartet sind (z.B. gebundene eindim. Zustände) ist der Ham.op $\hat{H}$ eine vollständige Obs.

Bei Entartung: weitere, mit $\hat{H}$ vertauschbare Obs. hinzufügen (z.B. Drehimpuls, Spin)

Hilbertraum $\mathcal{H}$ eines phys. Systems wird durch die gemeinsamen Eigenvektoren (Basis) eines vollständ. Satzes vertauschbarer Obs. aufgespannt.

Nichtvertauschbarkeit u. Unschärfe

seien $\hat{F}$, $\hat{G}$ hermite'sche Op., $|\psi\rangle$ bel. Zustand

$$\left.\begin{aligned}\Delta\hat{F} &:= \hat{F} - \langle\hat{F}\rangle \\ \Delta\hat{G} &:= \hat{G} - \langle\hat{G}\rangle\end{aligned}\right\}$$ ebenfalls hermite'sche Op.

Bilde

$$f(\lambda) := \langle(\Delta\hat{F} + i\lambda\Delta\hat{G})(\Delta\hat{F} - i\lambda\Delta\hat{G})\rangle$$

$$= \langle(\Delta\hat{F})^2 - i\lambda[\Delta\hat{F}, \Delta\hat{G}] + \lambda^2(\Delta\hat{G})^2\rangle$$

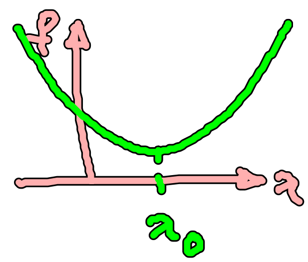
$$= \underbrace{\langle(\Delta\hat{F})^2\rangle}_{\alpha \geq 0} - i\lambda\underbrace{\langle[\Delta\hat{F}, \Delta\hat{G}]\rangle}_{\beta} + \lambda^2\underbrace{\langle(\Delta\hat{G})^2\rangle}_{\gamma \geq 0}$$

quadrat. Fkt. von λ mit $f(\lambda) \to \infty$ für $|\lambda| \to \infty$

(Lemma: für herm. Op. $\langle\hat{A}\hat{A}\rangle \geq 0$, $(i\hat{A})^+ = -iA$,)
$\langle\hat{A}\hat{B}\rangle^* = \langle\hat{B}\hat{A}\rangle$

Mit $\hat{Q} := \Delta\hat{F} - i\lambda\Delta\hat{G}$ gilt
$\hat{Q}^+ = \Delta\hat{F} + i\lambda\Delta\hat{G}$;

$$f(\lambda) = \underbrace{\langle\psi|\hat{Q}^+}_{\langle\phi|}\underbrace{\hat{Q}|\psi\rangle}_{|\phi\rangle} = \langle\phi|\phi\rangle \geq 0 \quad \forall\lambda$$



Min.: $f'(\lambda) = -i\beta + 2\lambda\gamma \overset{!}{=} 0$

$$\Longrightarrow \lambda_0 = \frac{i}{2}\frac{\beta}{\gamma}$$

$$f(\lambda_0) = \alpha + \frac{\beta^2}{2\gamma} - \frac{\beta^2}{4\gamma} = \alpha + \frac{\beta^2}{4\gamma} \geq 0 \quad (*)$$

$$\beta^2 = \langle [\Delta\hat{F}, \Delta\hat{G}] \rangle^2 = \langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle^2$$

$$= - \langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle \underbrace{\langle [\hat{G}, \hat{F}] \rangle}_{\langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle^*} = - |\langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle|^2$$

$\Rightarrow \beta$ imaginär

(*) $\Rightarrow \langle (\Delta\hat{F})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{G})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle|^2$

$$\boxed{\sqrt{\langle (\Delta\hat{F})^2 \rangle} \sqrt{\langle (\Delta\hat{G})^2 \rangle} \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle|}$$

qm. Unschärfe

Speziell: $[\hat{p}, \hat{x}] = \frac{\hbar}{i} \mathbb{1}$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{\langle (\Delta\hat{p})^2 \rangle} \sqrt{\langle (\Delta\hat{x})^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Impuls- Orts-

Unschärfe

Zus. fass.

Axiome der QM

(1) Zustand des System $\longrightarrow$ $|\psi\rangle$

(2) Obs. F $\longrightarrow$ herm. Op. $\hat{F}$

(3) Mittelwerte der Obs. $\longrightarrow$ $\langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle$

(4) Messung von F: Messwert $\longrightarrow$ Eigenwert F_n

$|\psi\rangle \longrightarrow |n\rangle$

Reduktion des Zustandes

(5) Zeitentw. der Zustände:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$$ Schrödinger-Gl.

QM ist keine Wellen- oder Teilchenmechanik, sondern eine <u>Zustands</u>mechanik!

(Auflösung des Welle-Teilchen-Dualismus)