

1.6 Der harmon. Oszillator u. Leiteroperatoren

Anwendungsbeispiel der abstrakten Darstell. im Hilbertraum
1-dim. harmon. Osz. (Notation in Folg.: x, p, \dots
statt \hat{x}, \hat{p}, \dots)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

Hamiltonop.

$$[p, x] = \frac{\hbar}{i}$$

Vertauschungs-Rel.

Def. eines Operator („Leiter op.“):

$$b := \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} p - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x \quad \text{nicht hermitesch!}$$

$$b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} p + i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x$$

$$\Rightarrow bb^\dagger = \frac{1}{2m\hbar\omega} p^2 + \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + \frac{i}{2\hbar} \underbrace{(px - xp)}_{[p,x] = \frac{\hbar}{i}}$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega} H + \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$b^\dagger b = \frac{1}{2m\hbar\omega} p^2 + \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 - \frac{i}{2\hbar} \underbrace{(px - xp)}_{\frac{\hbar}{i}}$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega} H - \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow \boxed{[b, b^\dagger] = 1}$$

$$(2) \Rightarrow \boxed{H = \hbar\omega \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right)}$$

Weitere Vertauschungsrel.:

$$\left. \begin{aligned} (bb^\dagger)b &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\hbar\omega} Hb + \frac{1}{2}b \\ = b(b^\dagger b) &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\hbar\omega} bH - \frac{1}{2}b \end{aligned} \right\} [b, H] = bH - Hb = \hbar\omega b$$

$$\text{adjungiert: } (bH)^\dagger - (Hb)^\dagger = -[b^\dagger, H] = \hbar\omega b^\dagger$$

$$[b, (b^\dagger)^n] = n(b^\dagger)^{n-1} = \frac{\partial}{\partial b^\dagger} (b^\dagger)^n$$

Beweis durch vollst. Induktion:

$$n=1: [b, b^\dagger] = 1 \quad \checkmark$$

Sei für $n \geq 1$ Behaupt. bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} [b, (b^\dagger)^{n+1}] &= b(b^\dagger)^{n+1} - (b^\dagger)^{n+1}b \\ &= \underbrace{b(b^\dagger)^n b^\dagger - (b^\dagger)^n b b^\dagger}_{n(b^\dagger)^{n-1}} + \underbrace{(b^\dagger)^n b b^\dagger - (b^\dagger)^n b^\dagger b}_1 \\ &= [b, (b^\dagger)^n] b^\dagger + (b^\dagger)^n [b, b^\dagger] \\ &= (n+1)(b^\dagger)^n \quad \square \end{aligned}$$

adjungiert: $[b^\dagger, b^n] = -n b^{n-1} = -\frac{\partial}{\partial b} b^n$

Für bel. in Potenzreihe entwickelbare Fkt. f :

$$\begin{aligned} [b, f(b^\dagger)] &= \frac{\partial}{\partial b^\dagger} f(b^\dagger) \\ [b^\dagger, f(b)] &= -\frac{\partial}{\partial b} f(b) \end{aligned}$$

Eigenwerte von H

Sei $|E\rangle$ ein normierter Eigenzustand von H mit dem Eigenwert E , $|E\rangle \neq 0$

$$H|E\rangle = E|E\rangle$$

$$\Rightarrow \hbar\omega \underbrace{\langle E|b^\dagger b|E\rangle}_{\langle \eta|\eta\rangle \geq 0} = \langle E|(H - \frac{\hbar\omega}{2})|E\rangle = E - \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E \geq \frac{\hbar\omega}{2}} \quad \text{Energiespektrum nach unten beschränkt}$$

Vollständige Ind. : Sei $H(b^\dagger)^n |0\rangle = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})(b^\dagger)^n |0\rangle$

Dann $H(b^\dagger)^{n+1} |0\rangle \stackrel{!}{=} \hbar\omega(n+1+\frac{1}{2})(b^\dagger)^{n+1} |0\rangle$
zeigen □

Normierung der Eigenzustände $(b^\dagger)^n |0\rangle$:

Der Grundzustand sei normiert: $\langle 0|0\rangle = 1$

n-ter angeregter Zustand:

$|n\rangle = \alpha_n (b^\dagger)^n |0\rangle$ mit Normierungsfaktor α_n

$$1 \stackrel{!}{=} \langle n|n\rangle = |\alpha_n|^2 \langle 0|b^n (b^\dagger)^n |0\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle 0|b^n (b^\dagger)^n |0\rangle &= \langle 0|b^{n-1} \left((b^\dagger)^n b + \underbrace{[b, (b^\dagger)^n]}_{n(b^\dagger)^{n-1}} \right) |0\rangle \\ &= \langle 0|b^{n-1} \underbrace{(b^\dagger)^n b |0\rangle}_{=0} + n \langle 0|b^{n-1} (b^\dagger)^{n-1} |0\rangle \\ &\stackrel{n\text{-mal}}{=} \dots \\ &= n(n-1) \dots \cdot 2 \cdot 1 \underbrace{\langle 0|0\rangle}_1 = n! \end{aligned}$$

also (bis auf willkürlichen Phasenfaktor:

$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^\dagger)^n |0\rangle$

 normierte Eigenzustände

zu den Energieeigenwerten

$E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$

$$H|n\rangle = E_n |n\rangle$$

Quanten-Sprechweise :

$$E_{n+1} - E_n = \hbar\omega \quad \text{„Schwingungsquant“}$$

$|n\rangle$ Zustand mit n Schwingungsquanten (Phononen)
der Frequenz ω

b Vernichtungsop. } für Schwingungsquanten
 b^+ Erzeugungsop. }

$$\begin{aligned}
 b|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}} b(b^+)^n |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \{ (b^+)^n b + [b, (b^+)^n] \} |0\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \underbrace{n(b^+)^{n-1} |0\rangle}_{\sqrt{(n-1)!} |n-1\rangle} = \frac{n}{\sqrt{n}} |n-1\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle
 \end{aligned}$$

$$b^+|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^+)^{n+1} |0\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$


$N := b^+ b$ „Teilchenzahl“ op. der Schwingungsquanten.

$$\begin{aligned}
 N|n\rangle &= b^+ b |n\rangle = n |n\rangle \\
 &\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\sqrt{n} |n-1\rangle} \\
 &\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\sqrt{n} \sqrt{n} |n\rangle}
 \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit

$$H|n\rangle = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2}\right) |n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle$$

Unterschiede zur klass. Schwingung:

- diskrete Energien $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$
- Nullpunktenergie $E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$
- Unschärfe-Bez.: x und p nicht zugleich scharf
 $\Delta x \Delta p = \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right)$
- Energie scharf \Rightarrow Schwingungs-Phase unbestimmt

- Phase scharf (kohärenter Zustand)

\Rightarrow kein Energieeigenzustand
(nicht stationär, schwing. Gauß-Wellenpaket)
Überlagerung vieler Energien
„Glanzzustände“)

- Aufenthaltswahrsch. $\neq 0$ in klass. verbotenen Bereich (Tunneleffekt)
- große Energie (n groß) \rightarrow klass. Korrespondenzprinzip
 $E \gg \hbar\omega = 25 \text{ meV}$
 $\hat{=} 10^{-27} \text{ kWh}$