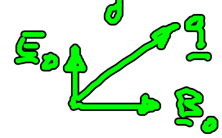
4.6 Das Photonengas im Strahlungshohlraum

Elektromagn. Strahlung in einem ladungs- u. stromfreien Hohlraum im thermischen Gleichgewicht:

$$\left.\begin{aligned} \underline{E}(\underline{r},t) &= \underline{E}_0\, e^{i(\underline{q}\underline{r}-\omega(q)t)} \\ \underline{B}(\underline{r},t) &= \underline{B}_0\, e^{i(\underline{q}\underline{r}-\omega(q)t)} \end{aligned}\right\}$$

ebene Wellen als Lösung der Maxwellgln.



mit $\underline{E}_0 \cdot \underline{B}_0 = 0$, $\underline{q}\cdot\underline{E}_0 = \underline{q}\cdot\underline{B}_0 = 0$

und $\omega(q) = c|\underline{q}|$

transversale Welle!

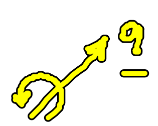
Quantisierung des elektromagn. Feldes:

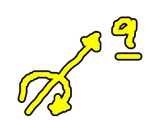
harmon. Osz. der Frequenz $\omega(q)$ $\Longrightarrow E_q = \hbar\omega(q)\left(n_q + \frac{1}{2}\right)$, $n_q = 0, 1, 2, \ldots$

Interpretation von n_q als Zahl der „Schwingungsquanten" oder Photonen mit Energie $\hbar\omega(q)$ und $\hbar\underline{q}$. Photonen sind Bosonen (da $n_q = 0, 1, 2, \ldots$ möglich) mit Spin $S = 1$.

Aber: Entartungsgrad nur 2 (2 Spinzustände) $\hat{=}$ 2 Polarisationsrichtungen (linkszirkular u. rechtszirkul.)

$\underline{S} \uparrow\downarrow \underline{q}$ $\qquad$ $\underline{S} \uparrow\uparrow \underline{q}$





Die 3. Einstellmöglichkeit des Spins tritt nicht auf (keine „longitudinalen Photonen", Lichtgeschw. c, da Ruhmasse $m_0 = 0$)

Im therm. Gleichgewicht des Photonengases mit den Wänden („Hohlraumstrahlung") werden ständig Photonen emittiert und absorbiert. Ihre Anzahl $\bar{N}$ ist deshalb bereits durch T und V festgelegt und daher keine unabhängige Nebenbed. $\Longrightarrow$ kanon. Ensemble

Formal: Setze $\boxed{\underbrace{\mu = 0}_{\text{chem. Pot.}}}$ in der Boseverteilung

$$\bar{N} = 2\sum_{\underline{q}} \frac{1}{\exp\left\{\frac{\hbar\omega(q)}{kT}\right\} - 1} = 2\sum_{\underline{q}} \langle N_q \rangle$$

$$U = 2\sum_{\underline{q}} \frac{\hbar\omega(q)}{\exp\left\{\frac{\hbar\omega(q)}{kT}\right\} - 1}$$

2 Polarisationsrichtungen

<u>Übergang zum Quasi-Kontinuum</u>

$$2\sum_{\underline{q}} \longrightarrow \frac{2V}{h^3}\int d^3(\hbar \underline{q}) = \frac{8\pi V}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dq\, q^2 \overset{\omega = cq}{=} \frac{8\pi V}{(2\pi)^3 c^3}\int_0^\infty d\omega\, \omega^2$$

$$= \frac{8\pi V}{c^3}\int_0^\infty d\nu\, \nu^2 \quad \text{mit } \omega = 2\pi\nu$$

$\Longrightarrow$ <u>Zustandsdichte der Photonen</u> $\boxed{\mathcal{D}(\nu) = \frac{8\pi V}{c^3}\nu^2}$

$$\bar{N} = \int_0^\infty d\nu\, \mathcal{D}(\nu) \langle N_\nu \rangle$$

$$U = \int_0^\infty d\nu\, \mathcal{D}(\nu)\, h\nu \langle N_\nu \rangle$$

Spektrale Energiedichte der Strahlung:

$$\boxed{u(\nu,T) := \frac{1}{V}\, D(\nu)\, h\nu \langle N_\nu \rangle = \frac{8\pi h}{c^3}\, \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}}$$

Planck'sche Strahlungsformel

Grenzfälle: $h\nu \ll kT$: $u(\nu,T) \approx \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{h\nu/kT} = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 kT$

Rayleigh-Jeans-Gesetz

(klass. Resultat, $\nu \to 0$)

$h\nu \gg kT$: $u(\nu,T) \sim \nu^3 e^{-a\frac{\nu}{T}}$

(W. Wien, empir. Result, $\nu \to \infty$) für irdische Lichtquellen, versagt für Sonne, Fixsterne

Planck'sche Ableitung der Strahlungsformel (1900)

Postulat: Strahlungsenergie gequantelt $E_n = n h\nu$ in Zustandssumme,

damit konnte Max Planck erstmals die Strahlung schwarzer Körper (d.h. vollständig absorbierender Strahlungshohlräume im thermodyn. Gleichgewicht) erklären u. zwischen Rayleigh-Jeans und Wien interpolieren.

$\Longrightarrow$ historischer Ausgangspunkt der Quantentheorie (14.12.1900)

Maximum der spektralen Energiedichte für $h\nu \gg kT$:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \sim \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\nu^3 e^{-a\frac{\nu}{T}}\right) = \left(3 - a\frac{\nu}{T}\right)\nu^2 e^{-a\frac{\nu}{T}} \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \boxed{\nu_{max} \sim T}$ Wien'sches Verschiebungsgesetz

Gesamtenergie:

$$U(T) = V\frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty d\nu \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1} = V\frac{8\pi}{(ch)^3}(kT)^4 \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x-1}}_{\pi^4/15}$$

$$\boxed{U(T) = V\frac{8\pi^5}{15(ch)^3}(kT)^4}$$ Stefan-Boltzmann-Gesetz

Wärmekapazität: $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \sim T^3$

Strahlungsdruck:

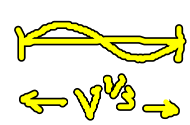
Aus $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$ folgt mit der kanon. Zustandssumme Z

$$F = -kT\ln Z = kT\sum_\nu \ln\left(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)$$

$$p = kT\left(\frac{\partial}{\partial V}\ln Z\right)_T = -kT\sum \frac{\frac{h}{kT}\left(\frac{\partial \nu}{\partial V}\right)e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1-e^{-h\nu/kT}}$$

Mit dem Vol. V ändert sich die Frequenz ν einer steh. Welle

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \sim V^{-1/3}$$



$$\frac{\partial \nu}{\partial V} = -\frac{1}{3}\frac{\nu}{V} \sim V^{-4/3}$$

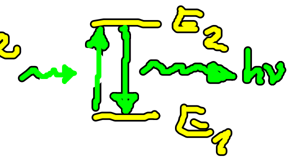
$$\Rightarrow p = \frac{1}{3V}\sum_\nu \frac{h\nu\, e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1-e^{-h\nu/kT}} = \frac{1}{3V}\sum_\nu h\nu \langle N_\nu\rangle$$

$$\boxed{p = \frac{1}{3}\frac{U}{V}}$$ Strahlungsdruck

Einstein'sche Ableitung der Planck'schen Strahlungsformel (1917)

Einstein (1905): Lichtquantenhypothese $\rightarrow$ „Photonen"
(Photoeffekt)

Im Strahlungshohlraum: 2-Niveau-Atome
(Entartung g_1, g_2)



Im therm. Gleichgewicht gilt für die mittleren Besetzungszahlen der elektron. Atomniveaus (Fermionen)

$$\frac{\langle N_2\rangle}{\langle N_1\rangle} = \frac{g_2\, p(E_2)}{g_1\, p(E_1)} = \frac{g_2\, e^{-\beta E_2}}{g_1\, e^{-\beta E_1}} = \frac{g_2}{g_1}\, e^{-\beta \underbrace{(E_2 - E_1)}_{h\nu}}$$

$$p(E_i) = Z^{-1} e^{-\beta E_i}$$

Im therm. Gleichgewicht werden im Mittel gleich viele Photonen emittiert u. absorbiert.

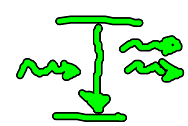
Raten (= Zahl der Übergänge pro Zeit u. Vol.):

(i) Absorption $E_1 \rightarrow E_2$: $\quad B_{12}\, \underbrace{u(\nu,T)}_{\sim \text{Photonenzahl}} \langle N_1\rangle$

(ii) spontane Em. $E_2 \rightarrow E_1$: $\quad A_{21}\langle N_2\rangle$

$\tau = \frac{1}{A_{21}}$ Lebensdauer

(iii) erzwungene Em. $E_2 \rightarrow E_1$: $\quad B_{21}\, u(\nu,T)\langle N_2\rangle$



(von Einstein neu eingeführt!

$\Longrightarrow$ Grundlage von Maser 1954, Laser 1961)

Bilanzgl.:

$$B_{12}\, u(\nu,T)\langle N_1\rangle = A_{21}\langle N_2\rangle + B_{21}\, u(\nu,T)\langle N_2\rangle$$

$$\Longrightarrow \quad u(\nu,T) = \frac{A_{21}}{B_{12}\,\frac{g_1}{g_2}\,e^{\beta h\nu} - B_{21}}$$

<u>Postulate</u>: (i) $\lim\limits_{T\to\infty} u(\nu,T) = \infty \Longrightarrow \boxed{B_{12}\,\frac{g_1}{g_2} = B_{21}}$

$$\Longrightarrow \quad u(\nu,T) = \frac{a}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

(ii) Für $kT \gg$ gilt Rayleigh-Jeans:

$$\lim_{T\to\infty} u(\nu,T) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 kT \Longrightarrow \boxed{a = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3}$$

$\Longrightarrow$ Planck

<u>NB</u>: Verallgemeinerung auf El. system im <u>Nicht</u>gleichgewicht

$\Longrightarrow$ Photonen mit eff. chem. Potenzial $\mu \neq 0$

[Landsberg, J. Phys. <u>C14</u>, L1025 (1981) $\quad \mu = F_n - F_p$

Schöll & Landsberg, J. Opt. Soc. Am. <u>73</u>, 1197 (1983)]

$\longrightarrow$ Anwendung Laser

(Laserbedingung $F_n - F_p = E_{Gap}$ Halbleiterlaser)

Differenz der Quasi-Fermi-Niveaus

fern vom thermodyn. Gleichgewicht