Theoretische Physik VI: Vertiefung (Nichtgleichgewichtsstatistik)

Vorlesung WS 2010/11
E. Schöll, K. Lüdge
11 ECTS-Leistungspkte (4 + 2 SWS)

- Masterstudiengang Physik:
  Pflichtmodul Theoret. Physik V/VI
  grundlagenorientiert: $\underbrace{\text{TP V (QM II) + TP VI (Auswahl)}}_{\text{1 Schein}}$
  anwendungsorientiert: $\underbrace{\text{TP V (QM II) oder TP VI (Auswahl)}}_{\text{1 Schein}}$

- kann auch als Wahlpflichtfach (8 SWS, 1 Schein, 12 ECTS) im Diplom- oder Masterstudiengang gewählt werden, zus. mit Spezialvorles. „Dynamik auf Netzwerken"
  (Hövel, Mi 10–12 EW 731, ab 27.10.)
  oder „Nichtlin. Dyn. in Physiologie u. Medizin"
  (Dahlem, Mo 10–12 EW 184)

  oder Sem. „Komplexe Netzwerke u. Anwendungen"
  (Di 16–18 EW 731)

VL: Do + Fr 10:15 – 12:00 EW 203
Ü: Mo 12:15 – 14:00 EW 561

http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws1011

Inhalt der VL

1. Stoch. Prozesse
2. Klass. Statistik im Nichtgleichgewicht
3. Rauschinduzierte Oszillationen u. Muster

4. Quantenstatistik im Nichtgleichgewicht
5. Boltzmann-Gleichung
6. Rekombination u. Nichtgleichgewichtsstatistik

Lit. s. Webseite

1. Stochastische Prozesse

Grundlagen der Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth.

1.1. Zufallsvariablen

Ereignis (event): Messergebnis von Observablen,
Mikrozustand

Math. Struktur: **Ereignisalgebra** $\mathcal{A}$ (Boole'scher Verband)

Menge, $\cup$ (Vereinigung „oder"), $\cap$ (Durchschnitt „und")

Axiome: für $A, B, C \in \mathcal{A}$ gilt

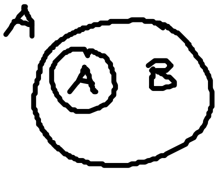
- $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ Kommut.gesetz
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ Assoz.gesetz
- $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (B \cap C) = A$ Verschmelzungsgesetz
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Distrib.gesetz

$\exists S$ (Einselement: sicheres Ereignis): $A \cap S = A$

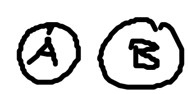
$\exists \emptyset$ (Nullelement: leeres Ereignis): $A \cup \emptyset = A$

$\forall A \in \mathcal{A} \ \exists B$: $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = S$: Komplement ($B = \bar{A}$, $\neg A$)

Induzierte **Halbordnung**: $A \subseteq B$, falls $A \cap B = A$
(A impliziert B)



A und B sind **disjunkt**, falls $A \cap B = \emptyset$



Vollständige disjunkte Ereignismenge (sample set)

$\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ mit $A_i \cap A_j = A_i \delta_{ij}$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$

Beispiel: $\{1,2,3,4,5,6\}$ beim Würfel

(NB: diese Menge ist kein Algebra, da $A \cup B \notin M$, $\bar{A} \notin M$)

<u>Wahrscheinlichkeit</u> (Kolmogorov)

Sei $A \in \mathcal{A}$ (Ereignisalgebra), $S \in \mathcal{A}$ sicheres Ereignis

Axiome der Wahrscheinlichkeit $P(A)$, $P: \mathcal{A} \to [0,1]$

- $P(A) \geq 0 \quad \forall A$
- $P(S) = 1$ 
- if $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 
  (disjunkte Ereignisse)

<u>Folgerungen</u>: $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1$

$$\Rightarrow P(A) \leq 1$$

$P(\emptyset) = 0$, da $\underbrace{P(S)}_{1} = P(\emptyset \cup S) = P(\emptyset) + \underbrace{P(S)}_{1}$

intuitiv: relative Häufigkeit

<u>Bedingte Wahrscheinlichkeit</u>

$P(A|B) := \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ Wahrscheinl. für A unter der Bed., dass B eingetreten ist

$P(A \cap B)$ heißt Verbundwahrsch. (joint probability)

A_1, A_2 heißen <u>unkorreliert</u>, falls

$$P(A_2 | A_1) = P(A_2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)},$$

NB: Somit folgt auch $P(A_1 | A_2) = P(A_1)$

<u>Zufallsvariable</u>

Zufallsvariable $X : \tilde{M} \to M$ ist gegeben durch

Ereignis Realisierung (z.B. Identität, $\tilde{M} \cong M$)

(i) Menge M von vollständig disjunkten Ereignissen X_i (sample set)

(ii) Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X_i)$ über M

Normierung $\sum_i P(X_i) = 1$ (wegen $\sum_i P(X_i) = P(\bigcup_i X_i) = P(S) = 1$)

<u>Kontinuierliche Ereignismenge</u> ($x \in \mathbb{R}$):

$P(x' \leq x \leq x' + dx') = \varrho(x')\,dx'$ definiert

<u>Wahrscheinlichkeitsdichte</u> (Wahrschein. verteilung) $\varrho(x)$

(Übergang zu diskreten Ereignissen: $\varrho(x) = \sum_{i=1}^{n} \delta(x - x^{(i)}) P_i$)

Normierung $\int_a^b dx\, \varrho(x) = 1$

<u>Physikal. Interpretation</u>: Realisierung der Wahrschein. verteilung durch <u>Ensemble</u> von vielen äquivalenten Systemen, d.h. durch Dichteverteilung $\varrho(x)dx$ der Ensemblemitglieder mit Werten $\in [x, x+dx]$.

<u>Verallgemeinerung</u> auf d Zufallsvar.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \qquad d^dx = dx_1 dx_2 \dots dx_d$

Normierung $\int d^dx\, \varrho(x) = 1$

<u>Mittelwert</u> (Erwartungswert) einer Zufallsvar. x:

$$\langle x \rangle := \int d^dx\, \varrho(x)\, x$$

Für Fkt. $\varphi(x)$:

$$\langle \varphi \rangle = \int d^dx\, \varrho(x)\, \varphi(x)$$

d.h. lineares Funktional $f : L \to \mathbb{R}$ $\quad$ L geeigneter Fkt.raum

$\varphi \mapsto \langle \varphi \rangle$

<u>Unkorrelierte Zufallsvar.</u>

x_1, x_2 heißen unkorreliert, falls $\boxed{\varrho(x_1, x_2) = \varrho_1(x_1)\, \varrho_2(x_2)}$

Dann gilt $\boxed{\langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle}$

Beweis: $\int dx_1 dx_2\, \varrho(x_1, x_2)\, x_1 x_2 = \underbrace{\int dx_1\, \varrho_1(x_1)\, x_1}_{\langle x_1 \rangle} \underbrace{\int dx_2\, \varrho_2(x_2)\, x_2}_{\langle x_2 \rangle}$ $\square$

<u>Zus.hang zwischen Wahrscheinl.verteilung u. Mittelwert</u>

ν-tes Moment der Wahrsch.verteil. $M_\nu := \langle x^\nu \rangle$

Momentenerzeugende $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\nu!} M_\nu$
(charakterist. Fkt.)

$$\frac{\partial^\nu}{\partial \alpha^\nu} Z(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = M_\nu$$