

# Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

$$\dot{x} = -kx + \sqrt{2D} \xi(t)$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0$$

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t-t')$$

FP-gl.

$$\frac{\partial}{\partial t} P = \frac{\partial}{\partial x} (kxP) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P$$

$$P = P(x, t | x_0, t_0)$$

zeitabh. Lösung:  $\langle X(t) \rangle_{x_0, t_0} = x_0 e^{-k(t-t_0)}$

$$\langle \Delta X^2 \rangle_{x_0, t_0} = \frac{D}{k} (1 - e^{-2k(t-t_0)})$$

Autokorrel. fkt. (stationär;  $t_0 \rightarrow -\infty$ )

$$\langle X(t_1) X(t_2) \rangle_{x_0, t_0} = \iint dx_1 dx_2 x_1 x_2 P(x_1, t_1; x_2, t_2 | x_0, t_0) \quad t_1 \geq t_2 \geq t_0$$

$$\begin{aligned} &= \int dx_2 \left[ \int dx_1 x_1 P(x_1, t_1 | x_2, t_2) \right] x_2 P(x_2, t_2 | x_0, t_0) \\ &\quad \langle x_1 \rangle_{x_2, t_2} = x_2 e^{-k(t_1-t_2)} \quad \sqrt{\frac{k}{2\pi D}} \exp\left[-\frac{k}{2D} x_2^2\right] \\ &= e^{-k(t_1-t_2)} \int dx_2 x_2^2 P \\ &= \frac{D}{k} e^{-k|t_1-t_2|} \langle X^2 \rangle_* = \underbrace{\langle \Delta X^2 \rangle_*}_{D/k} + \underbrace{\langle X \rangle_0^2}_0 \end{aligned}$$

exponentielle Korrelation mit Korrelationszeit  $\tau_c = \frac{1}{k}$

$$G(\tau) \equiv \langle X(t+\tau) X(t) \rangle = \frac{D}{k} e^{-k|\tau|} = \frac{D}{k} e^{-|\tau|/\tau_c}$$

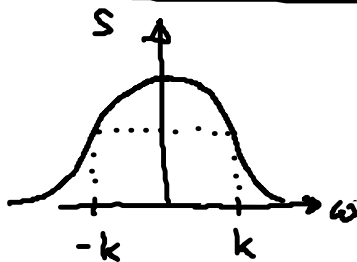
Spektrale Leistungsdichte  $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} G(\tau)$

$$S(\omega) = \frac{D}{2\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-k\tau} (e^{-i\omega\tau} + e^{i\omega\tau})$$

$$= \frac{D}{2\pi k} \left[ \frac{-1}{k+i\omega} e^{-k\tau - i\omega\tau} \right]_0^{\infty} + \frac{-1}{k-i\omega} e^{-k\tau + i\omega\tau} \left[ \right]_0^{\infty}$$

$$S(\omega) = \frac{D}{2\pi k} \left( \frac{1}{k+i\omega} + \frac{1}{k-i\omega} \right) = \frac{D}{\pi} \frac{1}{\omega^2 + k^2}$$

Lorentzkurve  
(Halbwertsbreite  $2k$ )



Direkte Lösung der Langevin-Gl.  $\dot{x} = -kx + \sqrt{2D} \xi(t)$ :

Subst.  $y = x e^{kt}$

$$\dot{y} = (\dot{x} + kx) e^{kt}$$

$$\Rightarrow \dot{y} = [-kx + \sqrt{2D} \xi(t)] e^{kt} + kx e^{kt}$$

$$\dot{y} = \sqrt{2D} e^{kt} \xi(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \sqrt{2D} \int_0^t e^{kt'} \xi(t') dt' + y(0) \stackrel{x(0) \text{ Auf. bed.}}{=}$$

$$x(t) = x(0) e^{-kt} + \sqrt{2D} \int_0^t e^{-k(t-t')} \underbrace{\xi(t') dt'}_{dW'}$$

$$\langle x(t) \rangle = \underbrace{\langle x(0) \rangle}_{\substack{\text{zufällige Auf. vert.} \\ \text{(unkorrel. mit } \xi(t))}} e^{-kt} + \underbrace{\sqrt{2D} \int_0^t e^{-k(t-t')} \langle \xi(t') \rangle dt'}_0$$

Autokorrel. fkt. :

$$\begin{aligned}
& \langle x(t)x(t') \rangle - \langle x(t) \rangle \langle x(t') \rangle \\
&= [\langle x(0)^2 \rangle - \langle x(0) \rangle^2] e^{-k(t+t')} + 2D \int_0^t dt'' e^{-k(t-t'')} \int_0^{t'} dt''' e^{-k(t'-t''')} \underbrace{\langle \xi(t'') \xi(t''') \rangle}_{\delta(t''-t''')} \\
&= [\langle x(0)^2 \rangle - \langle x(0) \rangle^2] e^{-k(t+t')} + \frac{2D}{2k} e^{-k(t+t')} \left. 2kt'' \right|_0^{t'} \\
&= \left[ \langle x(0)^2 \rangle - \langle x(0) \rangle^2 - \frac{D}{k} \right] e^{-k(t+t')} + \frac{D}{k} e^{-k|t-t'|}
\end{aligned}$$

$\downarrow$   
 $\int dt''$  fällt weg für  $t > t'$ , sonst  $\int dt'''$  weg

Stationär:  $t, t' \rightarrow \infty$ ,  $t-t'$  endlich

$$= \frac{D}{k} e^{-k|t-t'|} \quad \text{wie aus FP-Gl. !}$$

Varianz:  $t = t'$

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \left[ \langle \Delta x(0)^2 \rangle - \frac{D}{k} \right] e^{-k(t+t')} + \frac{D}{k} \xrightarrow[t, t' \rightarrow \infty]{\text{stationär}} \frac{D}{k}$$

### 3. Rauschinduzierte Oszillationen und Muster

Normalerweise ist Rauschen (noise) unerwünscht, schmiert die determinist. Dynamik aus u. macht sie irregulär (destruktiv).

Neues Phänomen: konstruktiver Einfluss v. Rauschen in nichtlinearen Systemen

- bestimmte Rauschintensität ist optimal

#### 3.1 Stochastische Resonanz

Verstärkung eines schwachen period. Signals mit Hilfe von Rauschen.

Resonanz als Fkt. der Rauschintensität

Lit.: Gammaitoni, Hänggi, Jung, Marchesoni, Rev. Mod. Phys. 70, 223 (1998)

Benzi, Sutera, Vulpiani, J. Phys. A 14, 451 (1981) } period. Wiederkehr der  
 Nicolis C, Nicolis G, Tellus 33, 225 (1981) } Eiszzeiten  
 (kleine period. Schwankungen der Erdoberfl. u. der Exzentrizität der Umlaufbahn - reichen allein nicht aus zur Erklärung der Klimaschwankungen,  $T = 20.000 / 100.000 \text{ J.}$ )

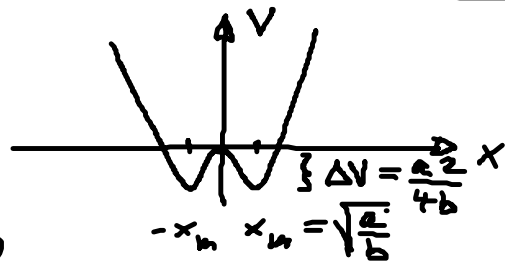
Weitere Beispiele: el. Stromkreis (Schmitt-Trigger),  
 bistabiler Ringlaser  
 chem. Reaktionen  
 Neurophysiologie (Spiking: 2-Zustands-Sys)  
 z.B. Flusskrebs (Crayfish)  
 Quanten-Tunneln  
 raum-zeitl. System (anregbare Medien)

Überdämpftes Brown'sches Teilchen im bist. Potenzial

$$V(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4$$

mit period. Kraft  $A_0 \cos(\Omega t)$

u. weißem Rauschen  $\xi(t)$



Langevin-Gl.:

$$\dot{x} = -V'(x) + A_0 \cos(\Omega t) + \xi(t)$$

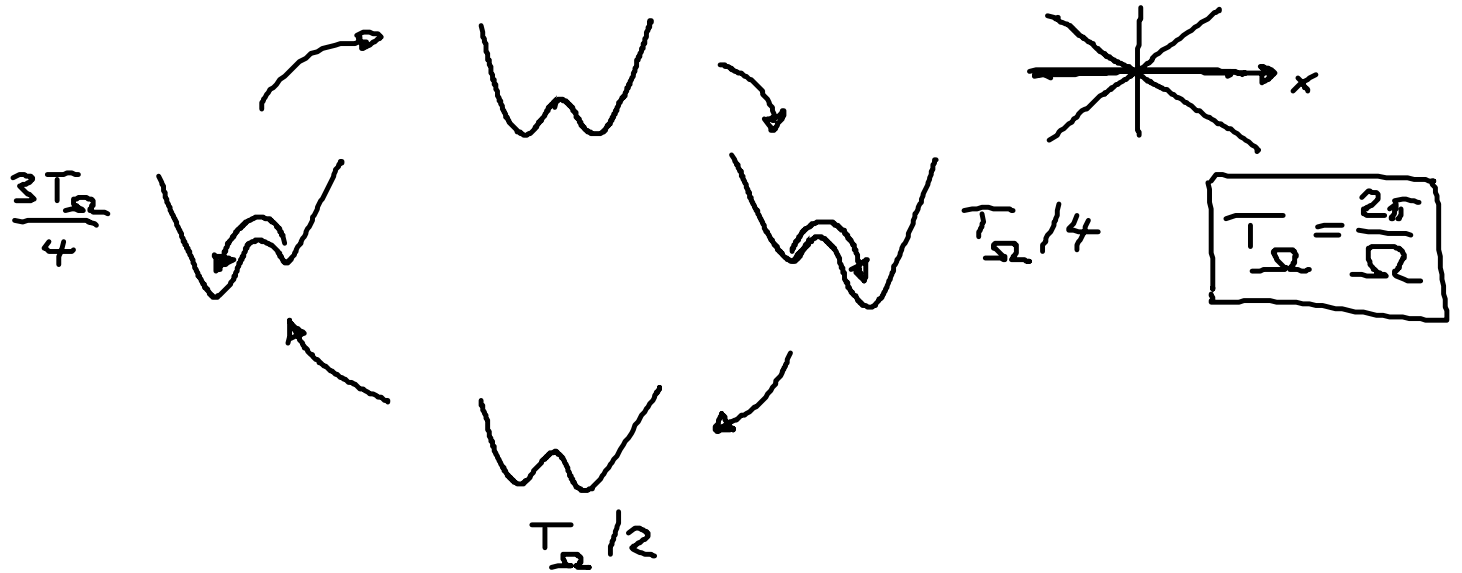
$$\langle \xi(t) \rangle = 0$$

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2D \delta(t-t')$$

Rauschinduz. Übergangsrate (Kramers-Rate) zwischen  $-x_m$  und  $+x_m$  (ohne period. Kraft):

$$r_K = \frac{1}{T_K(D)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta V}{D}\right) \quad (a=b=1)$$

period. Modulation des Pot.  $V(x) - A_0 x \cos(\Omega t)$ :

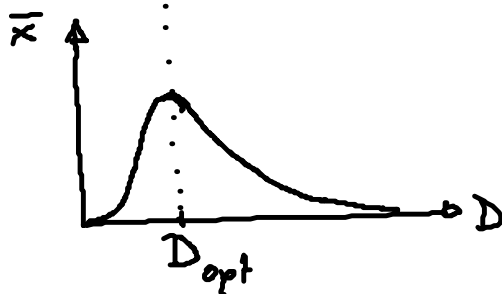


⇒ period. Osz. im bistab. Pot.  $\langle x(t) \rangle = \bar{x} \cos(\Omega t - \bar{\phi})$   
 Verstärkung der Amplitude  $\bar{x}$ , wenn  $T_{\Omega} \approx 2T_k(D)$   
 ( $\Omega \approx \pi r_k$ )

⇒ stochast. Resonanz



für kleine Amplituden:



$$\bar{x}(D) = \frac{A_0 \langle x^2 \rangle_0}{D} \frac{2\tau_k(D)}{\sqrt{4\tau_k^2(D) + \Omega^2}}$$

Spektrale Leistungsdichte

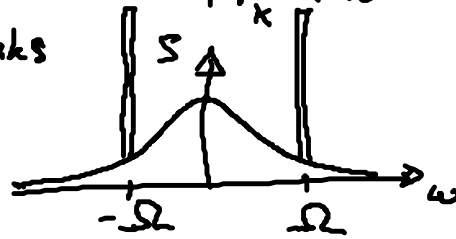
$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle x(t+\tau) x(t) \rangle$$

← zusätzlich über Anfangsphase gemittelt

Untergrundrauschen  $S_N(\omega) \approx \frac{4r_k \langle x^2 \rangle_0}{4r_k^2 + \omega^2}$

überlagert durch  $\delta$ -Peaks

bei  $\omega = \pm \Omega$

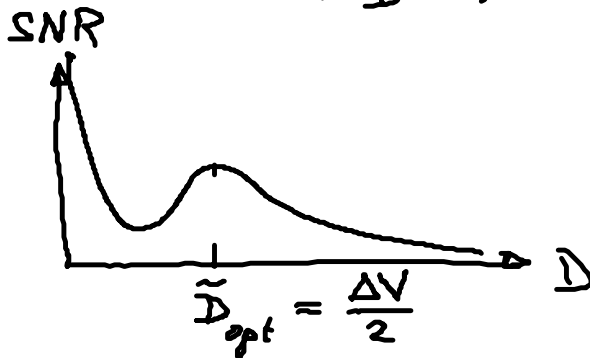


$$S(\omega) = \frac{\pi}{2} \bar{x}(D)^2 [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] + S_N(\omega)$$

Signal-to-noise ratio (Maß für Signalverstärkung):

$$SNR = \frac{2 \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Delta\omega}^{\Omega + \Delta\omega} S(\omega) d\omega}{S_N(\omega)}$$

$$\approx \pi \left( \frac{A_0 x_m}{D} \right)^2 r_k(D) \sim \frac{e^{-\frac{\Delta V}{D}}}{D^2}$$



$$\tilde{D}_{opt} \neq D_{opt}$$