4.2.7. Glauber Zustände (Fortsetzung)

- Photonstatistik

$$\langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^+\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^2 = \bar{n}$$

mittlere Photonenzahl

$$\langle\alpha|\hat{n}^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|a^+\underbrace{a a^+}_{[a a^+]=1}a|\alpha\rangle$$

$$= \langle\alpha|a^+a^+aa + a^+a|\alpha\rangle$$

$$= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 = \bar{n}^2 + \bar{n}$$

Varianz: $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle = \bar{n}^2 + \bar{n} - \bar{n}^2 = \bar{n}$

- Photonenzahl „verschmiert" um $\bar{n}$ mit $\sqrt{\bar{n}}$
- nicht Null wie im Fock-Zustand

- Quadraturkomponenten $\hat{x}_1, \hat{x}_2$

$$\hat{x}_1 = \hat{a}(0) + \hat{a}^+(0)$$

$$\hat{x}_2 = i(\hat{a}(0) - \hat{a}^+(0))$$

$$\langle\alpha|\hat{x}_1|\alpha\rangle = 2\,\mathrm{Re}\,\alpha$$

Ein modiges E-Feld:
$\hat{E} = -c\,(\hat{x}_2 \sin\omega t + \hat{x}_1 \cos\omega t)$

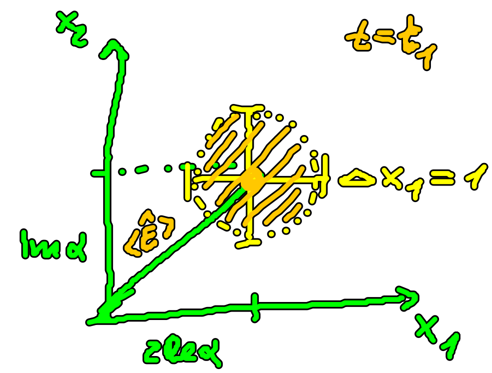
$$\langle\alpha|\hat{x}_2|\alpha\rangle = 2\,\mathrm{Im}\,\alpha$$

Schwankung

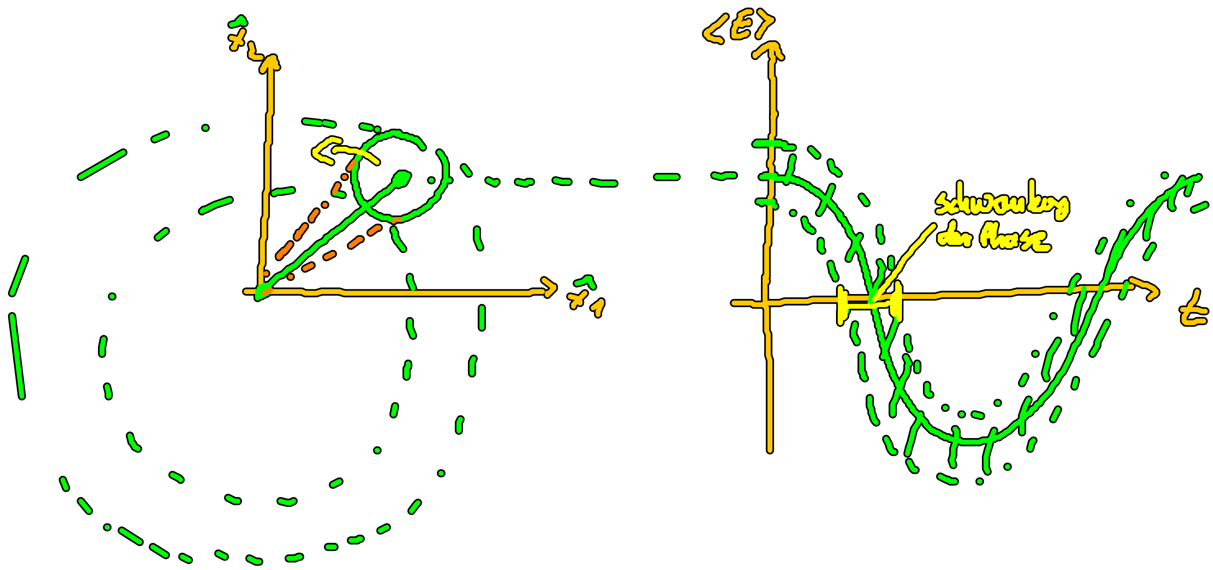
$$\langle\alpha|(\Delta x_1)^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|(\Delta x_2)^2|\alpha\rangle$$

$$= \langle\alpha|\underbrace{aa^+}_{1+a^+a} + a^+a + aa + a^+a^+|\alpha\rangle - (2\,\mathrm{Re}\,\alpha)^2$$

$$\underline{\underline{= 1}}$$



• Zeitabhängigkeit $\quad \alpha = \alpha_0 e^{-i\omega t}$



Bemerkung • $\dfrac{\sqrt{\langle\Delta\hat{n}\rangle^2}}{\langle n\rangle} = \dfrac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \to 0$

relative verschwindet für große Photonenzahl also große α

• im Glauber Zustand hat $\hat{E}$ relativ bestimmte Phase + Amplitude

$\to$ kommt klass. Elektro-magnetischen Welle sehr nahe

- Glauber Zustände können durch QM Verschiebeoperator aus Vakuum erzeugt werden

$$|\alpha\rangle = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \qquad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n |0\rangle$$

$$= \underbrace{e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha^n (\hat{a}^+)^n}_{\hat{D}(\alpha) \text{ Verschiebeoperator}} |0\rangle$$

$$= e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^+} |0\rangle$$

Term ändert $|0\rangle$ nicht

$$D(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^+} \overbrace{e^{-\alpha^* \hat{a}}}$$

es gilt $e^{A+B} = e^{-\frac{[A,B]}{2}} e^A e^B$

$= \cdot$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha a^+ - \alpha^* \hat{a}}}$$

- Warum Versch. Op?

$$D^{-1}(\alpha)\, \hat{a}\, D(\alpha) = \hat{a} + \alpha$$

$$D^{-1}(\alpha)\, \hat{a}^+ D(\alpha) = \hat{a}^+ + \alpha^*$$

→ Unitäre Transformation mit $\hat{D}$ verschiebt $\hat{a}$ um α

→ „verschiebt" die Ruhelage des Oszillators

- Warum wird $|\alpha\rangle$ kohärenter Zustand genannt?

$\hat{a}$ in q-Darstellung $\qquad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\omega q + \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right) \qquad p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$

es gilt $\hat{a}|0\rangle = 0$

DGL für $\rightarrow$ Vakuumzustand $\phi_0(q)$ in q-Darstellung

$$\left(\omega q + \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)\phi_0(q) = 0$$

Lösung: $\phi_0(q) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{\omega q^2}{2\hbar}}$

Gauß-Verteilung

Wähle als Anfangsbedingung ein verschobenes Vakuum

$q_\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\mathrm{Re}\,\alpha$

$p_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\,\mathrm{Im}\,\alpha$

$$\psi_{\alpha_0}(q) = \langle q|\alpha_0\rangle = \langle q|D(\alpha_0)|0\rangle$$

$$= e^{1/4(\alpha_0^{*2}-\alpha_0^2)}\, e^{i\frac{p_{\alpha_0}}{\hbar}q}\,\phi_0(q-q_{\alpha_0})$$

Zeitpunkt $t=0$

Hamiltonian: $\mathcal{H}|n\rangle = E_n|n\rangle = n\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2}$

Zeitentwicklung

$$\psi_\alpha(q,t) = e^{-i/\hbar\,\mathcal{H}t}\,\underbrace{\psi_{\alpha_0}(q)}_{\text{Anfangsbedingung}}$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}\,e^{-\frac{1}{\hbar}\left(n\hbar\omega+\frac{\hbar\omega}{2}\right)t}\,\phi_n(q)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\omega t}\,e^{-\frac{|\alpha_0|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha_0 e^{-i\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}}\,\phi_n(q)$$

$\alpha_0 e^{-i\omega t} = \alpha(t)$

$$= e^{-\frac{1}{2}\omega t}\, \psi_{\alpha(t)}(q)$$

$$|\psi(q,t)|^2 = \left|e^{i/\hbar\, p_{\alpha(t)} q}\, \phi(q - q_{\alpha(t)})\right|^2 = \left|\phi(q - q_{\alpha(t)})\right|^2$$

$$\to \qquad = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{\omega}{\hbar}(q - q_0 \cos\omega t)^2}$$

Wellenpaket, dass hin + her oszilliert ohne zu zerlaufen oder seine Form zu ändern

→ kohärenter Zustand

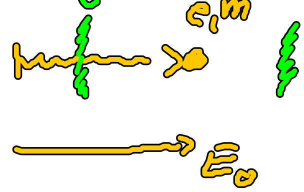
4.7.3. Gequetschte Zustände

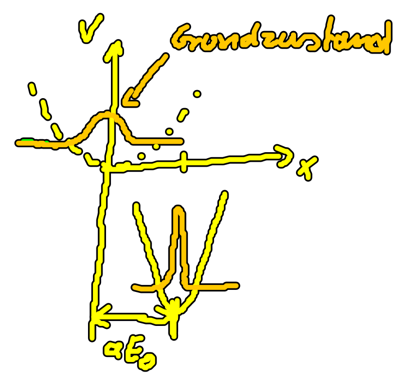
Vorstellung: harmonischer Oszillator mit externem Feld

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 - eE_0(ax - bx^2)$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}(k + 2ebE_0)x^2 - eaE_0 x$$

Variieren





$b = 0$: Lösung ist verschobener Grundzustand

Abschalten von E_0 liefert kohärenten Zustand

$b \neq 0$: entspricht zusätzlicher Barriere -> größere Fluktuationsstärke

• QM Formulierung

• man benötigt 2 Photonen Prozesse im Hamiltonian

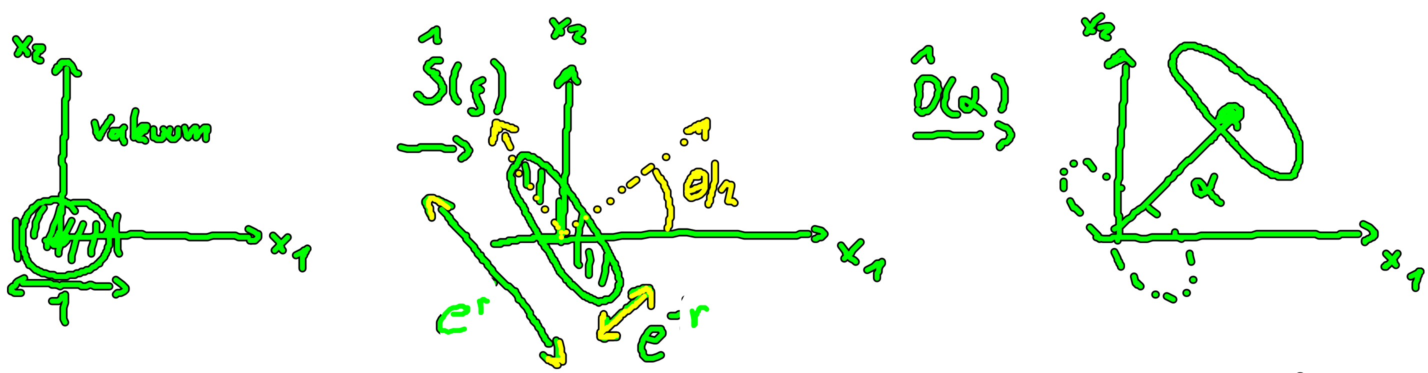
z.B. $\mathcal{H}_i = i\hbar(g\,\hat{a}^{+2} - g^*\hat{a}^{2})$

z.B. im nichtlinearen Kristall

Definiere einen Quetsch Operator $S(\xi)$

$$\hat{S}(\xi) = e^{\frac{1}{2}\xi^*\hat{a}^2 - \frac{1}{2}\xi\,\hat{a}^{+2}}$$

mit $\xi = r e^{i\theta}$ „Quetsch Parameter"



$$|\alpha,\xi\rangle = \hat{S}(\xi)\,\hat{D}(\alpha)\,|0\rangle$$

↑

kohärent gequetschter Zustand

<u>Def.:</u> $Y_1 + iY_2 = (x_1 + ix_2)\,e^{-i\theta/2}$ gedrehte Quadraturkomponenten

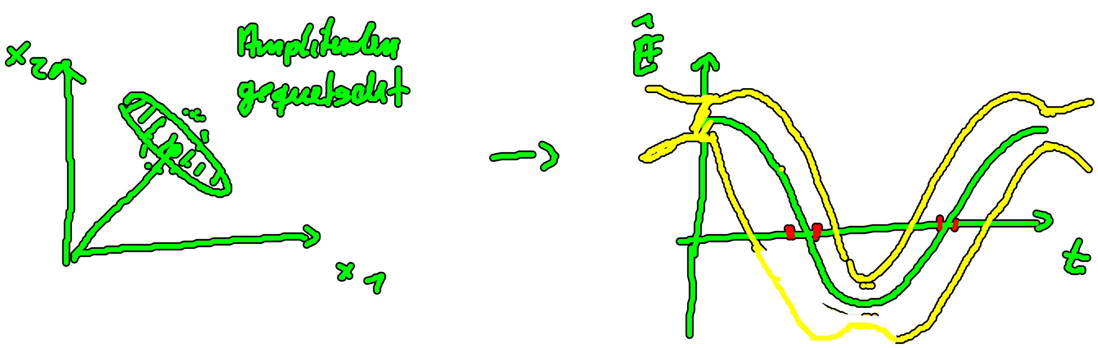
$$(\Delta Y_1)^2 = \langle Y_1^2\rangle - \langle Y_1\rangle^2$$

$$= e^{-2r}$$

$$(\Delta Y_2)^2 = e^{2r}$$

$$\longrightarrow \Delta Y_1 \, \Delta Y_2 = 1$$

Quetschung ist nicht-klassischer Effekt



- Fock Zustand ist maximal Amplituden gequetscht aber kein kohärent gequetschter Zustand

4.2.4. Verteilungsfunktion

- bisher: Diskussion der Quantenzustände des Lichts in wohldefinierten Zustände (reine Zustände)

- Realität:
  - es liegt ein Gemisch von Zuständen vor
  - Beschreibung durch Dichtematrixoperator

$$\hat{\rho} = \sum_{\psi} P_{\psi} |\psi\rangle\langle\psi|$$

$\hat{\rho}$ kann bezgl. Fock Zuständen entwickelt werden

$$\hat{\rho} = \sum_n \sum_m \rho_{nm} \, |n\rangle\langle m|$$

$\hat{\rho}$ bezgl. Glauber Zuständen entwickelt

$$\rho = \iint \frac{d^2\alpha}{\pi} \frac{d^2\beta}{\pi} \, |\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\rho|\beta\rangle}_{R(\alpha,\beta)} \langle\beta|$$

R-Repräsentation der Dichtematrix

- andere Möglichkeit: diagonal kohärente Repräsentation

P-Repräsentation

$$\rho = \int P(\alpha,\alpha^*)\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\,d^2\alpha$$

→ d.h. wir pressen wir die QM in ein klassisches Format

- funktioniert gut z.B. bei thermischem Licht

bei glaußen Zustand

ABER z.B. bei Fock zuständen ist P nicht wohldefiniert