4.5.3. Natur des Laserlichtes

- Langevin Gleichung für das Feld $\tilde{\alpha}$ $\nearrow \alpha/\sqrt{N}$ herleiten indem $\underline{P}^-$ und $\underline{D}$ adiabatisch aus Laser Gleichungen eliminiert werden aber nehmen Rauschterme mit

Laser Gl.:

$$\dot{\tilde{\alpha}} = -\frac{\gamma}{2}\tilde{\alpha} + g P^- + \frac{1}{\sqrt{N}} F^\alpha$$

$$\dot{\tilde{p}}^+ = g\tilde{\alpha}^+\tilde{D} - \frac{1}{2T}\tilde{p}^+ + \frac{1}{\sqrt{N}}\tilde{F}_{ab} \quad \xrightarrow{\dot{\tilde{p}}^+=0} \quad 2gT\tilde{\alpha}^+\tilde{D} + 2T\frac{1}{\sqrt{N}}\tilde{F}_{ab}$$

$$\dot{\tilde{D}} = -2g(\tilde{\alpha}^+\tilde{p}^- + \tilde{\alpha}\tilde{p}^+) + \frac{\tilde{D}_0 - \tilde{D}}{T} \quad \xrightarrow{\dot{\tilde{D}}=0} \quad \tilde{D} = \frac{\tilde{D}_0}{1 + 8g^2T^2\tilde{\alpha}^+\tilde{\alpha}}$$

(kein Rauschen F_z)

$$\Rightarrow \quad \dot{\tilde{\alpha}} = -\frac{\gamma}{2}\tilde{\alpha}\, f(|\tilde{\alpha}|^2) + \frac{1}{\sqrt{N}}\tilde{\Gamma}(t) \qquad (*_L)$$

$$f(|\alpha|^2) = 1 - \frac{4g^2 \cdot D_0}{\gamma \cdot \left(\frac{1}{T} + 8g^2T\alpha^+\alpha\right)}$$

$$f(|\alpha|^2) = 1 - \frac{C}{1 + \frac{\alpha^+\alpha}{n_0}}$$

Neuer Rauschterm:

$$\tilde{\Gamma}(t) = F^\alpha + 2gT\tilde{F}_{ab}$$

norm. Pumpstärke $\quad C = \frac{4g^2TD_0}{\gamma}$

Sättigungs-Photonendichte $\quad n_0 = (8g^2T^2)^{-1}$

wobei

$$\langle \tilde{\Gamma}^*(t)\tilde{\Gamma}(t')\rangle = 2Q\,\delta(t-t')$$

Photonenzahl des Vakuums

$$2Q = \gamma \overset{\alpha}{\bar{n}} + 4 g^2 T^2 W_{ba}$$

$\uparrow$ aus $\langle F^\alpha F \rangle$ $\quad\quad$ $\uparrow$ $\langle F_{ab}^* F_{ab} \rangle$ $\quad\quad$ $W_{ba} = \dfrac{1+D_0}{2T}$

Lösung der Langevin gl.:

Ansatz: kleine Abweichungen vom steady state α_0 --> Lineare Näherung

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \varepsilon(t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\alpha} = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\dot{\alpha}_0} + \dot{\varepsilon} \overset{\overset{*_1}{\downarrow}}{=} -\frac{\gamma}{2}(\alpha_0 + \varepsilon)\left\{ f(|\alpha_0|^2) + \varepsilon \left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{\alpha_0} + \varepsilon^* \left.\frac{\partial f}{\partial \alpha^*}\right|_{\alpha_0^*} \right\}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{\Gamma}(t)$$

1. Unterhalb der Schwelle: $(D_0 = 0) \longrightarrow f(0) = 1$

- keine Photonen $\alpha_0 = 0$

(keine quadratischen Terme in ε da ε klein)

$$*_1 \longrightarrow \quad \dot{\varepsilon} = -\frac{\gamma}{2}\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{\Gamma}(t)$$

Ornstein Uhlenbeck Prozess

Ansatz: $\varepsilon(t) = c(t)\, e^{-\gamma/2\, t}$

$$c(t) = \int_0^t dt' \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{\Gamma}(t') e^{\gamma/2\, t'}$$

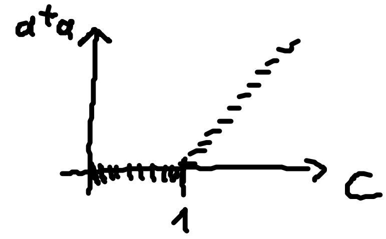
$$\Rightarrow \langle \varepsilon^*(t)\, \varepsilon(t') \rangle = G^{(1)} = \frac{2Q}{\gamma N}\, e^{-\frac{\gamma}{2}|t-t'|}$$

→ Eigenschaften des Lichtes nur bestimmt durch Rauschen in der Kavität (Photonenlebensdauer γ^{-1})

$$g^{(2)}(t) = 1 + e^{-\gamma|t|}$$

"bunching"

· thermisches Licht wie normale Lampe



2. Oberhalb der Schwelle $c > 1$

Vorgehen: 0. Näherung: vernachlässigen Rauschen
α ist konstant → $g^{(1)} = 1$
$g^{(2)} = 1$

1. Näherung: Amplitudenrauschen vernachlässigt
Phasenrauschen mitgenommen → Linienbreite $g^{(1)}$

2. Näherung: Ampl. + Phasenrauschen → $g^{(2)}$

- Zunächst Transformation von $\tilde{\alpha}$ in Polarkoordinaten

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Amplitude}}}{\tilde{\alpha} = R}\, e^{i\phi} \leftarrow \text{Phase}$$

$$\ln \tilde{\alpha} = \mu + i\phi \qquad R = e^{\mu}$$

• Langevin Gleichung als stochastische DGL

(I) $d\tilde{\alpha} = -\frac{\gamma}{2}\tilde{\alpha}\, f(|\tilde{\alpha}|)\, dt + \frac{1}{\sqrt{N}}\, d\tilde{\Gamma}(t)$ mit $d\tilde{\Gamma}\, d\tilde{\Gamma}^* = 2Q\, dt$

$d\tilde{\Gamma}^2 = d\Gamma^{*2} = 0$ (*)

Entwicklung der inf. Differenzen bis 2. Ordnung

$$d(\ln\tilde{\alpha}) = d\mu + i\, d\phi = \frac{d\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}} - \underbrace{\frac{(d\tilde{\alpha})^2}{\tilde{\alpha}^2}}_{\text{verschwindet wegen (*)}}$$

$$d\mu + i\, d\phi \overset{(I)}{=} -\frac{\gamma}{2} f(e^{2\mu})\, dt + \frac{1}{\sqrt{N}}\, e^{-\mu - i\phi}\, d\tilde{\Gamma}(t)$$

• Aufspaltung in Real + Imaginärteil:

$d\Gamma_R = \mathrm{Re}(e^{-i\phi}\, d\tilde{\Gamma})$

$d\Gamma_\phi = \mathrm{Im}(e^{-i\phi}\, d\tilde{\Gamma})$

$$\Rightarrow \quad d\mu = -\frac{\gamma}{2} f(e^{2\mu})\, dt + \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{N}}\, d\Gamma_R$$

$$d\phi = \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{N}}\, d\Gamma_\phi$$

es gilt $d\Gamma_R^2 = d\Gamma_\phi^2 = Q\, dt$

$d\Gamma_R\, d\Gamma_\phi = 0$

Es gilt $dR = e^{\mu} d\mu + \underbrace{\frac{1}{2} e^{\mu} d\mu^2}$ $\qquad (R = e^{\mu})$

bis 2. Ord:

$$\boxed{Gl_R} \quad \Rightarrow \quad dR = \Big(-\frac{\mu}{2} R\, f(R^2) + \underbrace{\frac{Q}{2NR}}_{\frac{1}{2} e^{\mu} d\Gamma_R d\Gamma_R^* \frac{e^{-2\mu}}{N}} \Big) dt + \frac{1}{\sqrt{N}} d\Gamma_R$$

Amplitude

$$\boxed{Gl_\phi:} \quad d\phi = \frac{1}{R\sqrt{N}} d\Gamma_\phi$$

Phase

Langevin Gleichungen für Amplitude + Phase von α

1. Näherung ohne Amplitudenrauschen

Korrelationsfunktion $G^{(1)}$ $\qquad \langle \alpha^*(t)\alpha(t')\rangle$

$$G^{(1)} = \langle R(t) R(t') e^{i\phi(t') - i\phi(t)} \rangle$$

• steady state von $R^{ss} = \sqrt{\tilde{n}_0 (C-1)} = \sqrt{a^+ a}$

$$\langle R(t) R(t')\rangle = \langle R^{ss} R^{ss}\rangle = \tilde{n}_0 (C-1)$$

$$G^{(1)} = \tilde{n}_0 (C-1) \langle e^{i(\phi(t') - \phi(t))} \rangle$$

aus $\boxed{Gl_\phi}$ folgt

$$\phi(t) - \phi(t') = \frac{1}{\sqrt{N\tilde{n}_0(C-1)}} \int_{t'}^{t} d\Gamma_\phi(t'')$$

$$d\Gamma_\phi^2 = Q\,dt$$

$$\langle (\phi(t) - \phi(t'))^2 \rangle = \frac{Q\,|t-t'|}{N\tilde{n}_0(C-1)}$$

- aus Statistik bekannt
  für gauß verteilte Werte x gilt: $\langle e^x \rangle = e^{\frac{1}{2}\langle x \rangle}$

$$\Rightarrow \boxed{G^{(1)} = \langle \tilde{\alpha}^*(t)\,\tilde{\alpha}(t') \rangle = \tilde{n}_0(C-1)\, e^{-\frac{Q|t-t'|}{2\tilde{n}_0 N(C-1)}}}$$

- Phasen Korrelationszeit

$$\tau_c = \frac{2\tilde{n}_0 N(C-1)}{Q}$$

→ je mehr Atome desto schmaler die <u>Linienbreite</u>

→ langsame Fluktuationen der Phase mit großer Amplitude

2. Näherung: Amplitudenrauschen

Linearisieren von $\boxed{Gl_R}$ um $R^{ss} = \sqrt{\tilde{n}_0(C-1)}$

Ansatz: $R = R^{ss} + r(t)$

$$\dot{R} = \dot{r}(t) = -\frac{\gamma}{2}\left(R^{ss} + r(t)\right)\left\{ f(R^{ss^2}) + r \cdot \frac{\partial f}{\partial R}\Big|_{R^{ss}} \right\} + \overbrace{\frac{Q}{2NR^{ss}}}^{O(\frac{1}{N})}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{N}} \Gamma_R$$

$$f(R^{ss}) = 1 - \frac{c}{1 + \frac{R^{ss\,2}}{n_0}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial R}\Big|_{R^{ss}} = \frac{c}{\left(1 + \frac{R^2}{n_0}\right)^2} \cdot \frac{1}{n_0} 2R \Big|_{R^{ss}}$$

$$= \frac{2\sqrt{c-1}}{c}$$

alle Terme linear in $r(t)$

$$\dot{r}(t) = -\gamma R^{ss} \frac{\sqrt{c-1}}{c} r(t) + \frac{1}{\sqrt{N}} \Gamma_R$$

Ornstein Uhlenbeck Gl.

$$\rightarrow \langle r^*(t)\, r(t') \rangle = \frac{c}{\gamma R^{ss}\sqrt{c-1}} \frac{Q}{2N} e^{-\gamma \tilde{n}_0 \frac{c-1}{c} |t-t'|}$$

Korrelationsfkt:

$$\langle R(t) R(t') \rangle = R^{ss\,2} + 2\underbrace{\langle R^{ss}\, r(t) \rangle}_{=0} + \langle r^*(t) r(t') \rangle$$

$$G^{(1)} = \langle R(t) R(t') \rangle \cdot e^{-\frac{Q|t-t'|}{2N\tilde{n}_0(c-1)}}$$

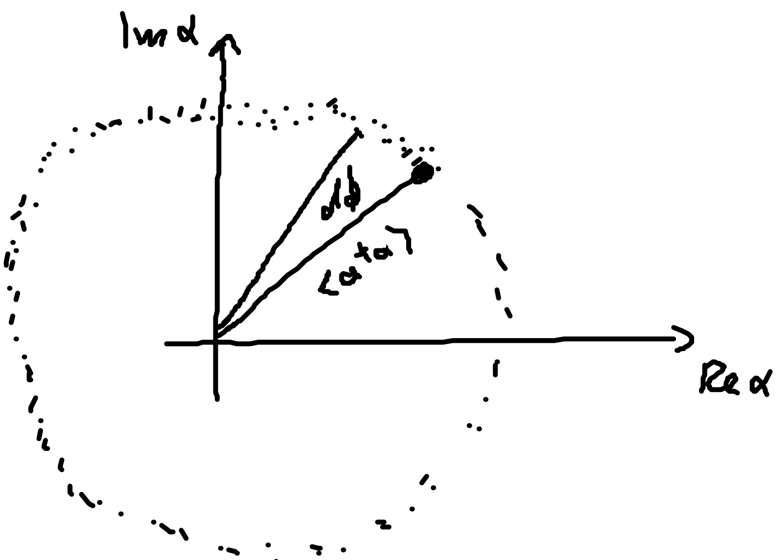
$$G^{(2)} = \langle \alpha^*(t)\alpha^*(t')\alpha(t)\alpha(t')\rangle = \langle R^2(t)R^2(t')\rangle$$
$$\approx R^{ss\,4} + 4R^{ss\,2}\langle r^*(t)r(t')\rangle$$

$R = R^{ss} + r$
$= R^{ss\,2} + 2R^{ss}r + r^2$

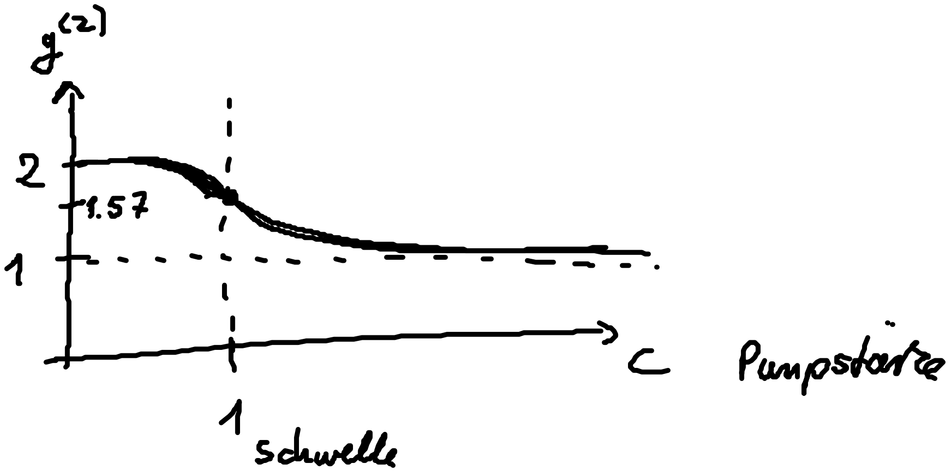
$$\boxed{g^{(2)}(t) = \frac{G^{(2)}}{R^4} = 1 + \frac{1}{N}\frac{Q^2}{\gamma\tilde{n}_0^3(c-1)^2}e^{-\gamma\tilde{n}_0\frac{c-1}{c}|t|}}$$

· je größer N desto näher kommt $g^{(2)}(t)$ dem Wert der Poisson-Statistik
nur leicht "super Poissonian"

→ schnelle Amplituden Fluktuationen
aber kleiner Amplitude



Phase diffundiert langsam
Intensität / Amplitude schnell



Analogie zum Phasenübergang 2. Ordnung (wie bei Ferromag.)

Laser : Atome entwickeln Dipole im E-Feld der anderen Atome

Ferromag: Spin sieht Magn. Feld der anderen Spins

Laserfeld α $\hat{=}$ Ordnungsparameter

Inversion $\hat{=}$ Temperatur

Photonen $\hat{=}$ Entropie

Kollektives Phänomen
im Nichtgleichgewicht