

Klein-Gordon-Gleichung

$$(\partial_\mu \partial^\mu + \lambda c^{-2}) \Psi = 0$$

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2$$

$\nabla \cdot \vec{j} + j = 0 \iff$ evtl. $j < 0 \implies$ Wahrscheinlichkeitsinterpretation
Schlecht

Idee: Ladungsdichteinterpretation

II. 1.3 Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung

als Wellengleichung kann die vollständige Lösung nach Elementarwellen entwickelt werden:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{p}} A(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - E t)}$$

ebene Wellen
mit $\hbar k = p$
 $\hbar \omega = E$

Dispersionsrelation $E = E(p)$

Einsetzen:

$$-\frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{1}{c^2} \frac{E^2}{\hbar^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} = 0$$

$$E = \pm c (m^2 c^2 + p^2)^{1/2} \equiv \pm E(p)$$

\rightarrow 2 Lösungen: $\Psi_{\pm}^{(p)} \sim e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - E_{\pm} t)}$, $E_{\pm} = \pm E(p)$

a) Sind das positive und negative Teilchen? \rightarrow ja!

b) in Schrödingertheorie war E die Energie.

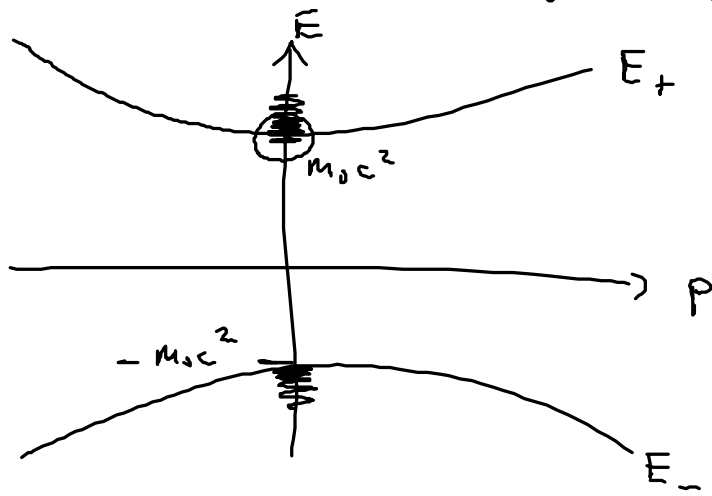
gibt es negative Energie bei freien Teilchen?

\rightarrow nein nicht!

II.1.4. Ladung von Teilchen / Antiteilchen-Paar, neutrales Teilchen

E-Spektrum der Klein-Gordon-Gleichung:

↑
nicht
unbedingt
Energie



○ Schwingungs-Welt
Rest ist neu

Idee: Ladungsdichtekinterpretation

$$g \rightarrow e g = \frac{i \hbar e}{2 m_0 c^2} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) \quad (e > 0)$$

Dimension: Ladungsdichte

Ladung des Teilchens

$$q = \int d^3r e g$$

nehmen ψ_+, ψ_-

$$e^{-\frac{i}{\hbar} E(p) t} \quad e^{+\frac{i}{\hbar} E(p) t}$$

$$\rightarrow q_{\pm} = \pm \frac{e}{m_0 c^2} \int d^3r |\tilde{A}_{\pm}(p)|^2 c (m_0^2 c^2 + p^2)^{1/2}$$

Offensichtlich beschreibt ψ_+ ($E > 0$) ein Teilchen der Ruhemasse m_0 und Ladung $q_+ > 0$ und ψ_- ($E < 0$) ein Teilchen " " " und Ladung $q_- < 0$ → Teilchen / Antiteilchen-Paar

Indiz: jede relativistische Theorie ist ein Vielteilchentheorie

die Einzelteilchenbeschreibung ist nicht zu retten

Normierung über Ladung festgelegt

$$|\tilde{A}_{\pm}(\rho)\rangle = \left(\frac{|\rho_{\pm}|}{e} \frac{m_0 c^2}{E(\rho) L^3} \right)^{1/2}$$

Anzahl der Ladungen

Das neutrale Teilchen lässt sich durch Überlagerung konstruieren:

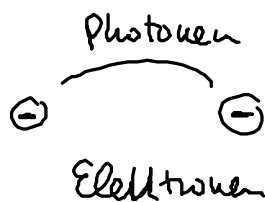
$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_+(\rho) + \Psi_-(-\rho)) \\ &= \left(\frac{m_0 c^2}{2E(\rho) L^3} \right)^{1/2} 2 \cos \left((\vec{p} \cdot \vec{r} - E(\rho)t) / \hbar \right) \end{aligned}$$

Es gibt keine weitere Freiheitsgrade außer Ladung, daher beschreibt die Klein-Gordon-Gleichung Spin 0-Teilchen.

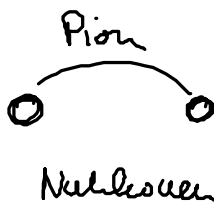
II.1.5. Pionen - Beispiel für massereiche Spin 0-Teilchen

Triplet von Pionen (π^+ , π^- , π^0)

Yukawa (1935) versuchte WW zwischen Nucleonen zu erklären
(effektive Theorie) (Kernkraft)



elektromagnetische Kraft



Kernkraft

stationär $\rightarrow \partial_t = 0 \Rightarrow (\Delta - \lambda c^{-2}) \psi = 0$

$$\lambda c^{-2} \neq 0 \xrightarrow{\text{Masse} \neq 0} \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{\lambda c}} \quad (\text{abgeschwächtes Coulomb-Potential})$$

"kurzreichweitig"

$$\lambda c^{-2} = 0 \xrightarrow{\text{Masse} = 0} \frac{1}{r} \quad (\text{Coulomb})$$

"langreichweitig"

II.1.6 Energie von Teilchen | Antiteilchen

Schrödingertheorie: $\underline{H}\Psi_n = \epsilon_n \Psi_n$, ϵ_n Energien der Teilchen

Suche: Hamiltonfunktion der KG-Gleichung

Idee: biegen um Lagrange-dichte \rightarrow Hamiltondichte \rightarrow Energie
(Lagrangeformalismus)

a) Raten einer Lagrange-dichte

2 Felder: $\psi, \psi^* \leftarrow \psi$ komplex

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^*) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{m_0} (\eta_{\mu\nu} (\partial^\mu \psi)(\partial^\nu \psi^*) - \lambda c^{-2} \psi^* \psi) \end{aligned}$$

b) Bestätigung der Lagrange-dichte durch Herleitung der KG-Gleichung

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi^*)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = 0 \quad \text{Euler-Lagrange-Gleichungen}$$

$$\leadsto \partial^\mu (\eta_{\mu\nu} \partial^\nu \psi) + \lambda c^{-2} \psi = 0$$

$$(\partial^\mu \partial_\mu + \lambda c^{-2}) \psi = 0 \quad \checkmark$$

c) Hamiltondichte bestimmen, als Energiedichte identifizieren

$$\mathcal{H} = \pi_\psi \cdot \partial_0 \psi + \pi_{\psi^*} \cdot \partial_0 \psi^* - \mathcal{L}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \partial^0 \psi^* = \frac{\hbar^2}{2m_0} \partial^0 \psi \quad (\partial^0 = \partial_0)$$

$$\rightarrow \mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m_0} (\partial_0 \psi \cdot \partial_0 \psi^* + \partial_i \psi \cdot \partial_i \psi^* + \lambda c^{-2} \psi^* \psi)$$

daraus ergibt sich Energie $H_{\pm}(t) = \int d^3r \mathcal{L}(\vec{r}, t)$ des Teilchens:

$$H_{\pm} = \frac{|q_{\pm}|}{e} E(\rho) > 0$$

der KG-Gleichung

Teilchen und Antiteilchen haben eine Energie > 0 ,
 E_{\pm} sind nur Parameter die ψ_{\pm} kennzeichnen.

II.1.7. Teilchen / Antiteilchen-Welle

relativistische Theorie ist immer eine Vielteilchentheorie:

Beispiel: negatives Pion gebunden an einen positiven Kern (Pionatom)
 (Potential ϕ)

⊖ Pion ($q < 0$)

stationäres

⊕

Kern

allgemein:

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \partial_t &\rightarrow i\hbar \partial_t - q\phi \\ \vec{p} &\rightarrow \vec{p} - q\vec{A} \end{aligned} \right\} \text{Teilchen in em. Feld } (\phi, \vec{A})$$

hier: statisches ϕ , $\vec{A} = 0$

$$(i\hbar \partial_t - q\phi)^2 \psi = -c^2 \hbar^2 \psi + m_0^2 c^4 \psi$$

KG-Gl. für Teilchen in Potential ϕ

Ableitung der Kontinuitätsgleichung im Potential ϕ :

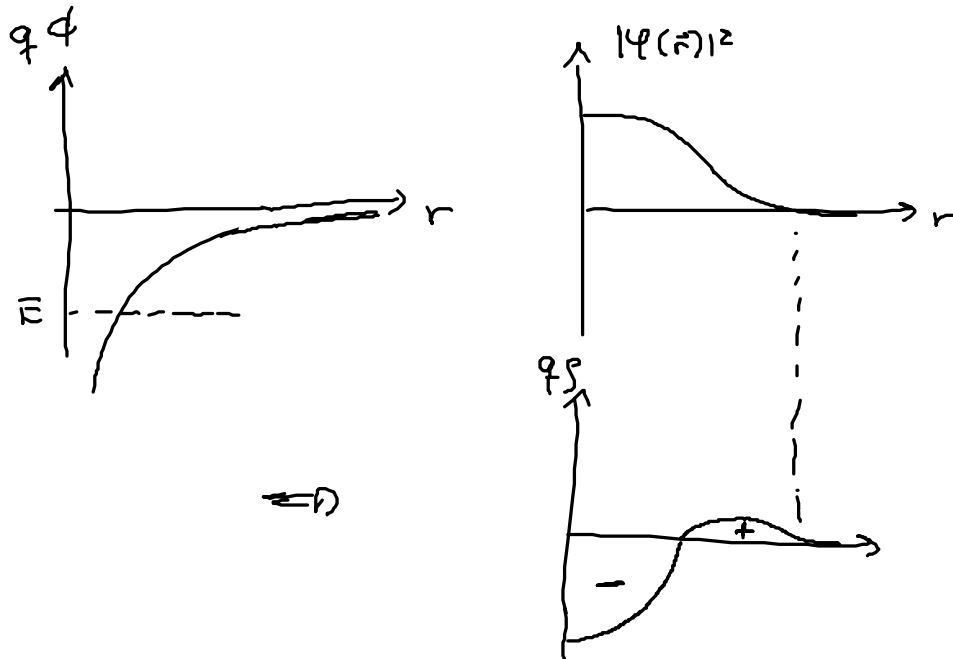
$$j = \frac{i\hbar}{2m_0c^2} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) - \frac{q}{m_0c^2} \phi \psi^* \psi$$

stationäres Problem: $\psi = e^{\frac{-iEt}{\hbar}} \psi(\vec{r})$, $\psi(\vec{r})$ wird aus stat. KG-Gl. bestimmt

$$[(E - q\phi)^2 - m_0^2 c^4 + \hbar^2 \nabla^2] \psi(\vec{r}) = 0$$

Ladungsdichte $qj = \frac{\hbar q}{m_0c^2} (E - q\phi) \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r})$

Annahme: gebundener Zustand $E < 0$
 lokalisierte Zustand



\Rightarrow

Ein Teilchen ist beim Vorliegen eines Potentials ϕ immer auch von Antiteilchen umgeben.

II. 1.8. "Langsame" Klein-Gordon-Gleichung ist Schrödinger-Gleichung

Ansatz: $\psi(\vec{r}, t) = \tilde{\psi}(\vec{r}, t) e^{-i/\hbar m_0 c^2 \cdot t}$
 \uparrow
 langsame zeitliche Variation

$$\begin{aligned} \rightarrow \partial_t^2 \psi &= \partial_t \left((\partial_t \tilde{\psi} - \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \tilde{\psi}) e^{-i/\hbar m_0 c^2 t} \right) \\ &= \underbrace{\left(\partial_t^2 \tilde{\psi} - \frac{2i}{\hbar} m_0 c^2 \partial_t \tilde{\psi} - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \tilde{\psi} \right)}_{=0} e^{-i/\hbar m_0 c^2 t} \end{aligned}$$

$$\rightarrow i\hbar \partial_t \tilde{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \tilde{\psi} \quad \text{Schrödinger-Gleichung}$$